Serie 6

1. Zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ heissen *asymptotisch gleich*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt. Welche der Folgen sind asymptotisch gleich?

a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} k$, $b_n = n^3$, $c_n = n^2$, $d_n = \frac{n^2}{2}$

b) $a_n = \frac{n^2+3n+1}{2n+5}$, $b_n = \frac{n^3+5n+1}{2n^2+1}$, $c_n = \frac{n^7}{2n^5}$, $d_n = \frac{n^4}{2n^3}$, $e_n = \frac{1}{2}n^2$

c) $a_n = -\sqrt{n^3} + \sqrt{(n+1)^3}$, $b_n = n^{3/2}$, $c_n = \frac{2}{3}n^{-1/2}$, $d_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-2}$

2. Zeige

a) Die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend.

b) Die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.

c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Hinweis: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq 0$

3. Sei $p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}$. Zeige

a) $a_n = \frac{p_n}{\sqrt{n}}$ ist monoton fallend.

b) $b_n = \frac{p_n}{\sqrt{n+1}}$ ist monoton wachsend.

c) Es gibt ein $p \in [\sqrt{2}, 2]$, so dass $(\sqrt{n}p)_n$ asymptotisch gleich zu $(p_n)_n$ ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $p = \sqrt{\pi}$.

Bitte wenden!

4. Multiple Choice.

1. Welche der Folgen $(a_n)_n$ ist monoton fallend oder wachsend?

(a) $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n^2}$

(b) $a_0 = 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} - a_n & a_n \leq \frac{n+1}{2n} \\ a_n + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) $a_n = \cos(n\pi)$

(d) $a_n = \sin(n\pi)$

(e) $a_n = \frac{1}{5|z^{3n+1}|+10}$. Hier ist z eine komplexe Zahl.

2. Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge und $a_n > 0$ für alle n. Welche der Aussagen gilt?

(a) $(a_n)_n$ ist beschränkt.

(b) $(a_n)_n$ konvergiert.

(c) Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann konvergiert $(s_n)_n$.

(d) Sei $t_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. Dann ist $t_{2n+1} < t_{2n}$, $(t_{2n})_n$ ist monoton fallend und $(t_{2n+1})_n$ ist monoton wachsend.

(e) Angenommen $(a_n)_n$ konvergiert gegen 0. Dann konvergieren $(t_{2n})_n$ und $(t_{2n+1})_n$ gegen denselben Grenzwert. Also konvergiert auch $(t_n)_n$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, 3.11.2014, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/mathematik1_CHAB`