Serie 8

1. Für welche $s > 0$ und $q > 0$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{q^n}$$

konvergent?

2. Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5 + n^3 - 1}}$

3. Zeige

$$\binom{s+t}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{s}{j} \binom{t}{k-j}$$

a) für $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}$ durch Betrachten der beiden Seiten der Identität als Funktion von t.

b) für $s, t \in \mathbb{C}$ durch Betrachten der beiden Seiten der Identität als Funktion von s.

Hinweis: In Serie 4, Aufgabe **2**, wurde die Identität für $s, t \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Bitte wenden!

4. Multiple Choice.

1. Welche der Reihen konvergiert?

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n}(2n+1)x^n$, $s, x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_{2k} = \frac{1}{3^{2k}}$, $a_{2k+1} = \frac{1}{3^{2k-1}}$, $k \in \mathbb{N}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, F_n die Fibonacci-Folge gegeben durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $|x|$ klein genug

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{n}$ für $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, und $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sonst.

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$?

(a) Für $|z| < 1$.

(b) Für $|z| \geq 1$.

(c) Für alle z.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, 17.11.2014, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/mathematik1_CHAB`