D-CHAB Grundlagen der Mathematik I (Analysis A) HS 2014
Theo Bühler

Serie 12

1. Zeige aus den Definitionen

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dass folgende Identitäten gelten.

a) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$

b) $\cos(z + \pi) = -\cos z$

c) $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$

d) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$

e) $\sin(z + \pi) = -\sin z$

f) $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$

2. Zeige

a) $\sin z - \sin w = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$

b) $\sin z$ ist auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend.

c) $\tan z$ ist auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend.

d) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

3. Sei $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die Umkehrfunktion des Tangens. Das Ziel dieser Aufgabe ist die Machinsche Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Zeige

a) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

b)

$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$
$$2\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
$$\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

Bitte wenden!

c) die Machinsche Formel.

Bemerkung: Mit der Machinschen Formel und der Reihe

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

lässt sich π einfach numerisch berechnen.

Siehe nächstes Blatt!

4. Multiple Choice. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst *gerade* respektive *ungerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ respektive $f(-x) = -f(x)$ für alle reellen x gilt.

1. Welche der Aussagen gilt?

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ist gerade.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist gerade.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$, ist ungerade.

(d) $\sin x$ ist gerade.

(e) $\cos x$ ist gerade.

(f) $\tan x$ ist gerade.

Bitte wenden!

2. Seien f und g Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Welche der Aussagen gilt?

(a) Die Summe $f(x) + g(x)$ und die Differenz $f(x) - g(x)$ ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, wenn sowohl f wie auch g gerade bzw. ungerade ist.

(b) Für das Produkt der Funktionen $f(x)g(x)$ gilt

$$f(x)g(x) \begin{cases} \text{gerade} & f, g \text{ gerade} \\ \text{ungerade} & f \text{ gerade }, \ g \text{ ungerade} \\ \text{gerade} & f, g \text{ ungerade} \end{cases} .$$

(c) Ist das Produkt $f(x)g(x)$ gerade, so ist sowohl f wie auch g gerade oder ungerade.

(d) Ist f gerade oder ungerade, so ist f durch die Funktionswerte $f(x)$ für alle $x \geq 0$ eindeutig bestimmt.

(e) Es existiert eine ungerade Funktion f mit $f(x) > 0$ für alle reellen x.

(f) Ist f ungerade, so gilt $f(0) = 0$.

(g) Die Funktion $f(x)$ ist gerade bzw. ungerade genau dann, wenn Realteil $\mathrm{Re}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Re}f(x)$, und Imaginärteil $\mathrm{Im}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Im}f(x)$, gerade bzw. ungerade sind.

(h) Ist f sowohl gerade als auch ungerade, so ist f null.

3. Welche der Aussagen gilt für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

(a) Ist f gerade, so ist die Ableitung f' gerade.

(b) Ist f gerade, so ist die Ableitung f' ungerade.

(c) Ist f ungerade, so ist die Ableitung f' gerade.

(d) Ist f ungerade, so ist die Ableitung f' ungerade.

Siehe nächstes Blatt!

4. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Reihe, die für alle x mit $|x| < R$ konvergiert. Welche der Aussagen gilt?

(a) Die Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{C}$ ist genau dann gerade, wenn $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

(b) Die Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{C}$ ist genau dann ungerade, wenn $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, 15.12.2014, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/mathematik1_CHAB`