Serie 5
Abschnitt 7.4

2) $x^2y' + xy = e^x$ $\quad y=\frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}dt \quad u=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt \quad y=\frac{1}{x}u$

$y'=\frac{-1}{x^2}u+\frac{1}{x}u'$ (Produktregel) $\quad u'=\frac{e^x}{x}$ (nach Serie 4)

einsetzen gibt: $x^2(\frac{-1}{x^2}u+\frac{1}{x}\frac{e^x}{x})+x\frac{1}{x}u=e^x$ Dies kürzt sich zu: $-u + e^x + u = e^x$

7) $2\sqrt{xy}\frac{dy}{dx}=1$, x,y > 0 Da $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ $\quad 2\sqrt{y}\sqrt{x}\frac{dy}{x}=1$

$\sqrt{y}\,dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ integrieren $\int\sqrt{y}\,dy=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ gibt: $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x}+c$

$y=(\frac{3}{2}\sqrt{x}+c)^{\frac{2}{3}}$

12) $y^2\frac{dy}{dx}=3x^2y^3-6x^2$, y>0 Ausklammern von $3x^2$: $\quad y^2\frac{dy}{dx}=3x^2(y^3-2)$

Separation der Variablen: $\int\frac{y^2}{y^3-2}dy=\int 3x^2dx$ $\quad [y^3-2]'=3y^2$ und das Integral somit:

$\frac{1}{3}\ln(y^3-2)=x^3+c$ beide Seiten mal 3 und $e^{()}$ gibt: $\quad y^3-2=e^{3x+3c}$

Da $e^{a+b}=e^ae^b$ folgt: $\quad y^3=e^{3c}e^{3x^3}-2$ und mit $K = e^{3c}$: $\quad y=\sqrt[3]{Ke^{3x^3}-2}$

Abschnitt 9.2

2) $xy'+3y=\frac{\sin(x)}{x^2}, x>0$ In die Standardform gebracht: $\quad y'+\frac{3}{x}y=\frac{\sin(x)}{x^3}$

Mit der Formel: $y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \quad P(x)=\frac{3}{x} \quad e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln(x)}=x^3$

$y=\frac{1}{x^3}\int\frac{\sin(x)}{x^3}x^3dx \qquad y=\frac{-\cos(x)+c}{x^3}$

6) $(t-1)^3\frac{ds}{dt}+4(t-1)^2s=t+1, t>1$ Standardform: $\quad s'+\frac{4}{t-1}s=\frac{t+1}{(t-1)^3}$

Wieder nach der Formel aus Aufgabe 2: $P(t)=\frac{4}{t-1} \quad e^{\int\frac{4}{t-1}dx}=e^{4\ln(t-1)}=(t-1)^4$

$s=\frac{1}{(t-1)^4}\int\frac{t+1}{(t-1)^3}(t-1)^4dt$ Dies reduziert sich auf (3. Binom): $\quad s=\frac{1}{(t-1)^4}\int t^2-1\,dt$

$s=\frac{\frac{1}{3}t^3-t+c}{(t-1)^4}$

10) $(x+1)\frac{dy}{dx}-2(x^2+x)y=\frac{e^{x^2}}{x+1}, x>-1, y(0)=5$ Standardform: $y'-2\text{xy}=\frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}$

P(x) = -2x $e^{\int -2\text{x}\,dx}=e^{-x^2}$ kürzt zu: $y=e^{x^2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$

$y=e^{x^2}(\frac{-1}{x+1}+c)$ Anfangswert einsetzen gibt: $y(0)=5=-1+c, c=6$

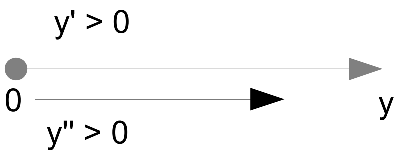
$y=e^{x^2}(6-\frac{1}{x+1})$

Abschnitt 9.4

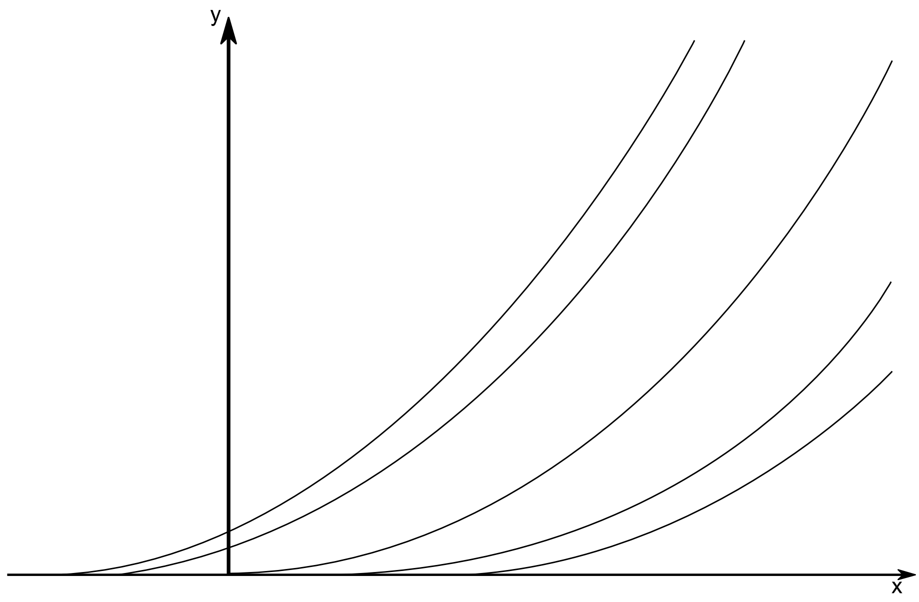
5) a) $y'=\sqrt{y}, y>0$ hat keine Stationäre Lösungen da y>0

b) y' > 0 für alle y. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}y'$ Implizite Differentiation. y' einsetzen ergibt:

$y''=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2}$ somit ist y immer konvex.



c)



7) a) $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$

Stationäre Lösungen: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$

b)

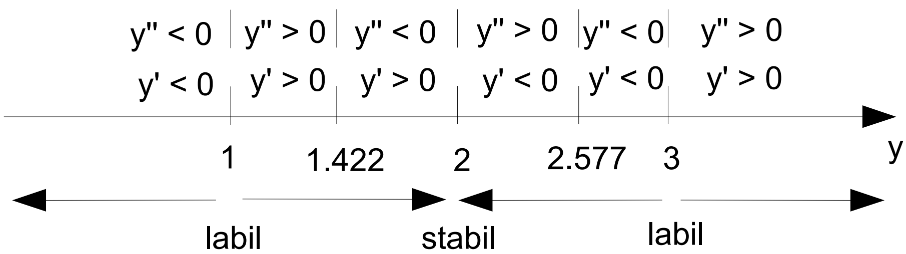
$$y''=y'((y-2)(y-3)+(y-1)(y-3)+(y-1)(y-3))=y'(y^2-5y+6+y^2-4y+3+y^2-3y+2)$$

$y''=y'(3y^2-12y+11)$ y'' = 0 wo y'=0 und wo $3y^2 -12y +11 = 0$ -> Mitternachtsformel:

$y_{4,5}=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-12\cdot 11}}{6}$ $y_4 = 1.422$ $y_5 = 2.577$

Tabelle aufstellen:

	y < 1	1 < y < 1.422	1.422 < y < 2	2 < y < 2.577	2.577 < y < 3	y > 3
y'	-	+	+	-	-	+
y''	-	+	-	+	-	+



c)