Loesung fuer die zusaetliche Aufgabe Serie 1

Aufgabe 1

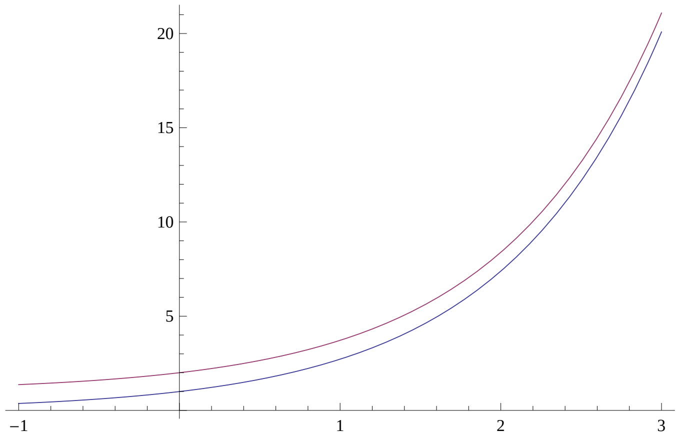

Figure 1: **blau:** e^x **und rot:** $e^x + 1$

Der vertikale Abstand ist immer 1. Wenn x nach unendlich tendiert, dann kommen die zwei Kurven immer naeher

.

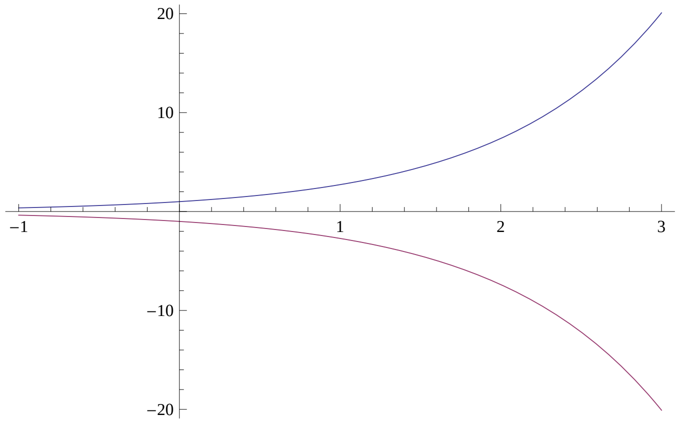

Figure 2: **blau:** e^x **und rot:** $-e^x$

Spiegelung an der X-Achse. Wie im Buch Im Abschnitt 1.2 erklaert.

.

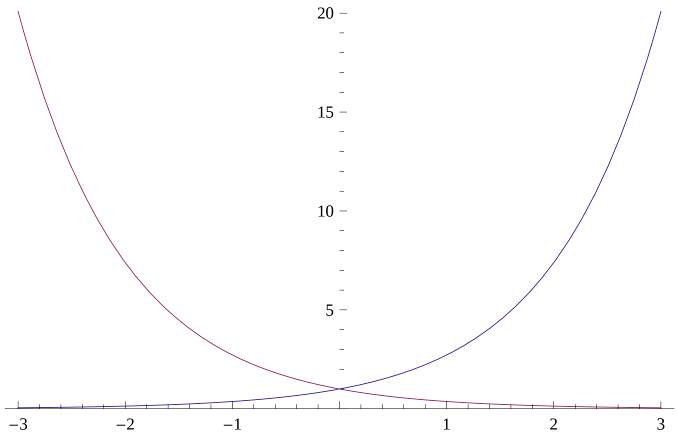

Figure 3: **blau:** e^x **und rot:** e^{-x}

Spiegelung an der Y-Achse wird im Buch im Abschnitt 1.2 erleutert.

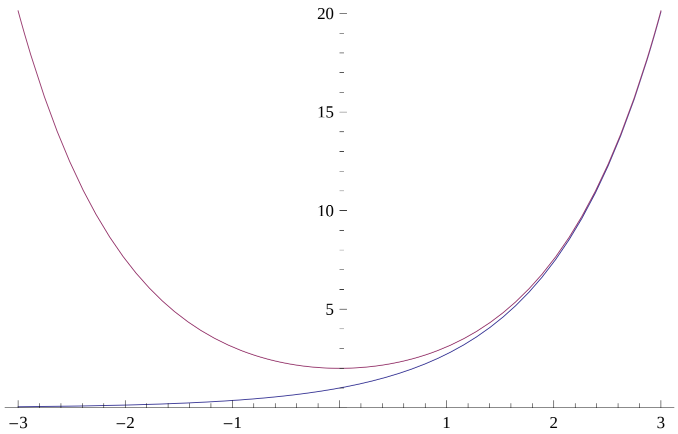

Figure 4: **blau:** e^x **und rot:** $e^x + e^{-x}$

Bei kleinen x hat der Term $\bar{e}^x$ einen grossen Einfluss, jedoch wen x gross wird verschwindet dieser.

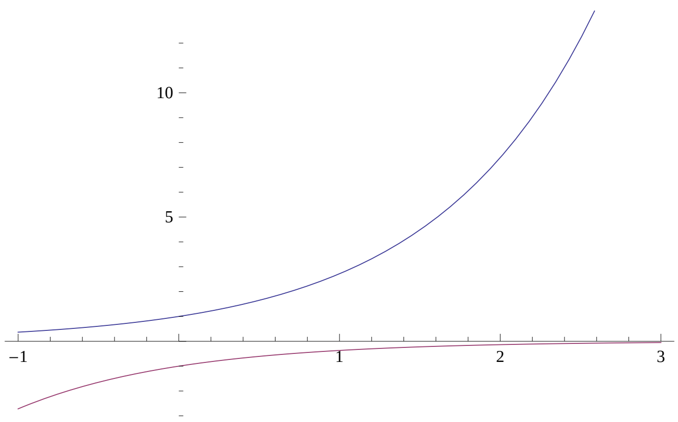

Figure 5: **blau:** e^x **und rot:** $-e^{-x}$

Eine Spiegelung sowohl an der y-Achse und an der x-Achse, welche zusammen als eine Punktspiegelung am Ursprung betrachtet werden kann.

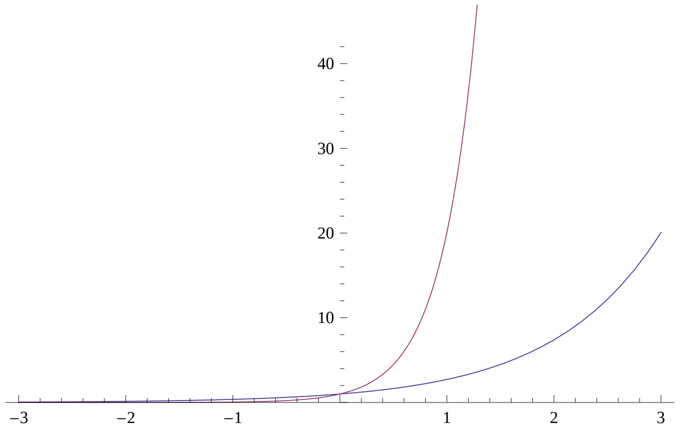

Figure 6: **blau:** e^x **und rot:** e^{3x}

Durch den Faktor 3 waechst die Funktion schneller als normalerweise.

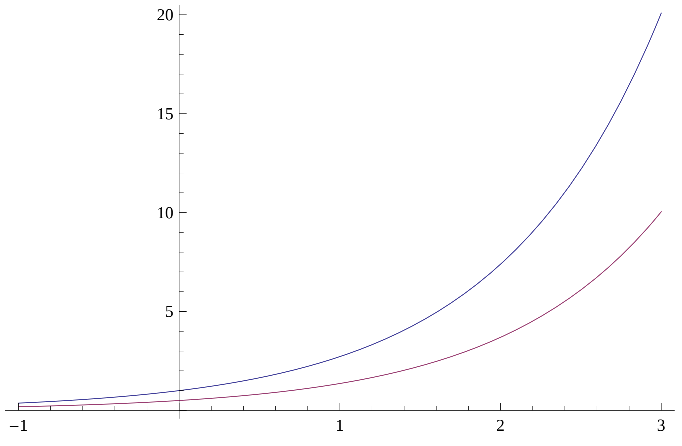

Figure 7: **blau:** e^x **und rot:** $1/2 \cdot e^x$

Eine Streckung beziehungsweise eine Stauchung da Multiplikation mit einer Zahl< 1
Siehe Buch Abschnitt 1.2

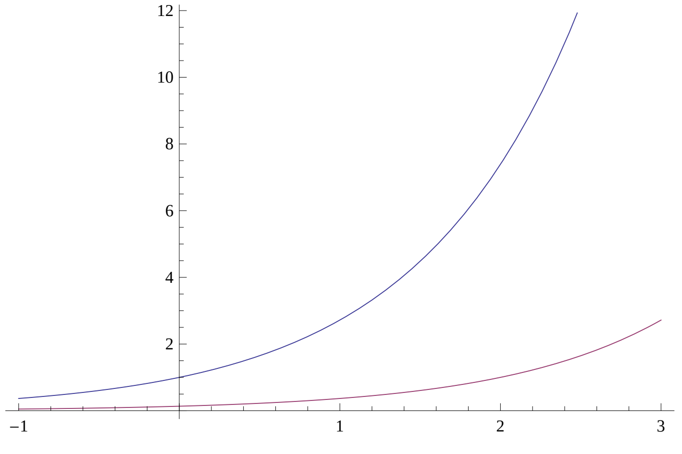

Figure 8: **blau:** e^x **und rot:** e^{x-2}

Verschiebung des Graphen um zwei nach rechts wie im Buch im Abschnitt 1.2 behandelt wird.

Loesung fuer die zusaetliche Aufgabe Serie 1

Aufgabe 2

2a.

cosh(x) ist positiv. Da die Funktionen e^x und e^{-x} beide positiv sind und bei der Addition bleiben sie positiv. sinh(x) hingegen kann auch negative Funktionswerte haben. Und zwar dann wenn e^x kleiner ist als e^{-x} und dies ist bei kleinen x der Fall.
Wertebereich fuer cosh(x): $[1, \infty)$
Wertebereich fuer sinh(x): $[-\infty, \infty)$

2b.& 2c.

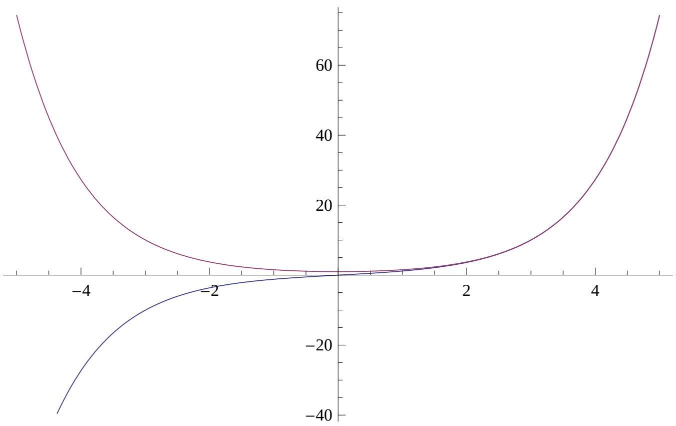

Figure 1: **rot: Cosh und blau: Sinh**

Aus den Graphen ist ersichtlich, dass der rote Graph(Cosh) eine gerade Funktion ist und die blaue (Sinh) eine ungerade.

2d.

$$
\begin{aligned}
cosh(x)^2 - sinh(x)^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}) - (e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x})}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} - e^{2x} + e^{-2x} - e^{-2x} + 2e^x e^{-x} + 2e^x e^{-x})}{4} \\
&= \frac{4e^x e^{-x}}{4} \\
&= e^x e^{-x} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2e.

$$
\begin{aligned}
cosh(x)^2 + sinh(x)^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}) + (e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x})}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + e^{2x} + e^{-2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - 2e^x e^{-x})}{4} \\
&= \frac{2e^{2x} + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\
&= cosh(2x)
\end{aligned}
$$

2f. (i)

$$
\begin{aligned}
cosh(x)' &= \left(\frac{(e^x + e^{-x})}{2}\right)' \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} \\
&= \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= sinh(x)
\end{aligned}
$$

2f. (i)

$$
\begin{aligned}
sinh(x)' &= \left(\frac{(e^x - e^{-x})}{2}\right)' \\
&= \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} \\
&= \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= cosh(x)
\end{aligned}
$$

2g.

Der wohl auffaeligste Unterschied ist, dass die sin(x) und cos(x) periodisch sind und die hyperbolischen Funktionen sinh(x) und cosh(x) nicht periodisch sind.

MULÖ A3

a) $y_0 = 100\,CHF$, $r = 5$, $t = 4$

$$y(t) = y_0\, e^{\frac{r}{100} t} \Rightarrow y(t=4) = 100\,CHF\; e^{\frac{5}{100}\cdot 4} = \underline{\underline{122.15\,CHF}}$$

mit Taschenrechner, auf 5 Rappen gerundet

---

b) i) Zu überprüfen: $\lambda \approx \frac{0.693}{\tau}$

Es gilt $N(\tau) = \frac{1}{2} N_0$ (A)

und $N(\tau) = N_0\, e^{-\lambda\tau}$ (B)

(Dies folgt aus $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ mit $t = \tau$ eingesetzt)

Aus Gleichsetzen von Gleichung (A) und (B) folgt

$$\tfrac{1}{2} N_0 = N_0\, e^{-\lambda\tau} \quad |: N_0$$

$$\tfrac{1}{2} = e^{-\lambda\tau} \quad |: \ln(\dots)$$

$$\ln(\tfrac{1}{2}) = -\lambda\tau$$

Mit $\ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(2^{-1}) = -1\cdot\ln(2)$, da $\ln(a^b) = b\cdot\ln(a)$

$$-\ln(2) = -\lambda\tau \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau} \approx \frac{0.693}{\tau}}}$$

Mit dem Taschenrechner kann $\ln(2) = 0.693$ berechnet werden

ii) Prognose: Wieviel wird nach 866 Jahren noch von N_0 übrig sein?

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t} \quad \text{mit } \lambda = 1.2\cdot 10^{-4} \text{ und } t = 866$$

$$\Rightarrow N(t=866) = N_0\, e^{-1.2\cdot 10^{-4}\cdot 866} = N_0 \cdot 0.901$$

Taschenrechner, auf 3 Stellen gerundet

Am Anfang $t=0$: N_0

Bei $t = 866$: $N_0 \cdot 0.901$

$\Rightarrow$ Nach 866 Jahren sind noch $\underline{\underline{90.1\,\%}}$ der Anfangssubstanz erhalten.