Dr. Ana Cannas

Zusätzliche Aufgabe 1: Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen gehören zu den wichtigsten Funktionen in der Mathematik und treten in einer Vielzahl von Anwendungen auf, inklusive Zinsraten, radioaktiver Zerfall, Bevölkerungswachstum, die Verbreitung einer Krankheit, Verbrauch natürlicher Ressourcen, Druck der Erdatmosphäre, Temperaturwechsel eines geheizten Objekts in einer kühleren Umgebung und Altersbestimmung von Fossilien.

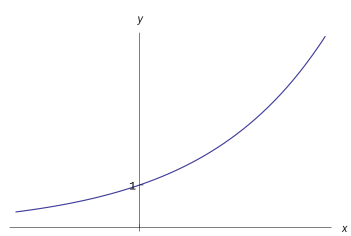
Die wichtigste Exponentialfunktion, die für Modellierung von natürlichen, physikalischen und ökonomischen Phänomenen gebraucht wird, ist die **natürliche Exponentialfunktion**

$$e^x,$$

welche als Basis die Eulerzahl hat,

$$e = 2.71828128\cdots$$

Hier ist ein Sketch des Graphen von e^x



Die Funktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar, nimmt alle strikt positiven Werte an und ist streng monoton wachsend.

1. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

a) $1 + e^x$.

b) $-e^x$.

c) e^{-x}.

Bitte wenden!

d) $e^x + e^{-x}$.

e) $-e^{-x}$.

f) e^{3x}.

g) $\frac{1}{2}e^x$.

h) e^{x-2}.

Hinweis: Es ist anschaulicher, wenn Sie in jeder Skizze den Graphen von e^x mit einer anderen Farbe hervorheben.

2. Der **Kosinus Hyperbolicus** und **Sinus Hyperbolicus** sind die Funktionen definiert durch

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Diese sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar, da es sich bei beiden um *Linearkombinationen*[1] von e^x und e^{-x} handelt.

a) Können $\cosh x$ oder $\sinh x$ negative Werte annehmen?

Was ist der Wertebereich von $\cosh x$ und von $\sinh x$?

b) Skizzieren Sie die Graphen von $\cosh x$ und von $\sinh x$.

c) Welche der beiden ist eine gerade Funktion und welche ist eine ungerade Funktion?

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Potenzen (insbesondere, $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$) $\cosh^2 x - \sinh^2 x$.

Das Resultat ist bekannt als der *hyperbolische Satz von Pythagoras* und ist eine Begründung für die Namensgebung dieser Funktionen.

e) Überprüfen Sie, dass

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x).$$

f) Berechnen Sie die Ableitungen

$$(\cosh x)' \quad \text{und} \quad (\sinh x)'.$$

[1] Eine Linearkombination von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist eine Funktion von der Form $af(x) + bg(x)$, wobei a und b gegebene reelle Konstanten sind.

Siehe nächstes Blatt!

g) Was sind die auffälligsten Unterschiede zwischen den hyperbolischen Funktionen $\cosh x,\ \sinh x$ und den trigonometrischen Funktionen $\cos x,\ \sin x$?

Hinweis: Betrachten Sie die Graphen.

3. Exponentialfunktionen von der Form

$$y_0 e^{at}$$

modellieren **exponentielles Wachstum** wenn $a > 0$ und **exponentiellen Zerfall** für $a < 0$. Hier wird die Konstante y_0 als Anfangswert betrachtet und die Varable t stellt die Zeit dar.

Für die folgenden Teilaufgaben dürfen Sie einen Taschenrechner verwenden.

a) Ein Modell für das Wachstum eines Investments von Fr. y_0 zu einer Jahreszinsrate von $r\%$ ist gegeben durch

$$y(t) = y_0 e^{\frac{r}{100}t},$$

wobei t die Anzahl Jahre seit des Anfangsinvestments darstellt.[2]

Wenn wir heute eine Investition von Fr. 100 zu einer Jahresrate von 5% tätigen, wie viel erwarten wir nach 4 Jahren?

b) Der radioaktive Zerfall einer radioaktiven Substanz (wie zum Beispiel Uran, Radium oder Carbon-14) wird beschrieben durch

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0 e^{-\lambda t},$$

wobei

- $\mathcal{N}(t)$ ist die Anzahl der zur Zeit t noch vorhandenen Atomkerne der radioaktiven Substanz und
- $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(0)$ ist die Anzahl der zu Beginn vorhandenen Atomkerne.

Überprüfen Sie, dass

$$\lambda \approx \frac{0.693}{\tau},$$

wobei τ die sogenannte *Halbwertszeit* ist, das heisst der Zeitraum, in dem genau die Hälfte der ursprüglich vorhandenen Atomkerne $\mathcal{N}_0$ zerfallen ist:

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_0.$$

Für $\lambda = 1.2 \times 10^{-4}$, wobei t in Jahren gemessen wird (dies entspricht der experimentell bestimmten Zerfallsrate von Carbon-14), machen Sie eine Prognose für den prozentualen Anteil der Anfangssubstanz $\mathcal{N}_0$, der nach 866 Jahren noch vorhanden ist.

[2] Die ersten Approximationen der Zahl e erschienen in der Arbeit des Schweizer Mathematikers Jakob Bernoulli (1654-1705) genau im Zusammenhang mit Zinseszinsrechnung