Zusätzliche Aufgabe 2:

1:

a) $\log_{10}(1000) = x \iff 1000 = 10^x \quad 1000 = 10^3 \quad x = 3$

$\log_{100}(10) = x \iff 10 = 100^x \quad 10 = \sqrt{100} \quad x = 0.5$

$\log_2(64) = x \iff 64 = 2^x \quad 64 = 2^6 \quad x = 6$

$\log_{0.5}(2) = x \iff 2 = 0.5^x \quad 2 = 0.5^{-1} \quad x = -1$

b) $\log_a(y) = u$, $\log_a(y_0) = v$ -> $\log_a(y) + \log_a(y_0) = u + v$

$a^u = y$, $a^v = y_0$ -> $y \cdot y_0 = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ -> $\log_a(y \cdot y_0) = u+v$

$\log_a(y \cdot y_0) = \log_a(y) + \log_a(y_0)$

$\log_a(y) = x$, $a^x = y$ Invertieren $a^{-x} = y^{-1} \mid \log_a(\ )$ $-x = \log_a(1/y)$

$\log_a(1/y) = -\log_a(y)$

$\log_a(y) = x$, $a^k = y$ -> $y^k = (a^x)^k = a^{xk} \mid \log_a(\ )$ -> $\log_a(y^k) = kx = k\log_a(y)$

$\log_a(y^k) = k \log_a(y)$

c) $2\log_a(3x) = \log_a(9x^2)$ $\quad 0.5\log_a(9x^2) = \log_a(3x)$

$2\log_a(3x) + \log_a(2x) - 0.5\log_a(9x^2) = \log_a(9x^2) + \log_a(2x) - \log_a(3x)$

$\log_a(9x^2 \cdot 2x/3x) = \log_a(6x^2)$

d) $e^{(\ln(0.2))t} = 0.04$ $\quad$ ln(x) ist die Umkehrfunktion von e^x. Somit ist $e^{\ln(x)} = x$.

$t\ln(0.2) = \ln(0.2^t)$ $\quad e^{(\ln(0.2))t} = 0.04 \quad 0.2^t = 0.04 \quad t\ln(0.2) = \ln(0.04)$

$t = \ln(0.04)/\ln(0.2) \quad t = \ln(0.2^2)/\ln(0.2) \quad t = 2\ln(0.2)/\ln(0.2) = 2$

e) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} \quad 2^{(3^4)} = 2^{81} \quad 2^{12} < 2^{81} \quad (2^3)^4 < 2^{(3^4)}$

f) $y = 0.1x^{2/3} \mid \log_{10}(\ )$

$\log_{10}(y) = \log_{10}(0.1x^{2/3}) \quad Y = \log_{10}(0.1) + \log_{10}(x^{2/3})$

$Y = -1 + 2/3 \cdot \log_{10}(x) \quad Y = -1 + 2/3X$

3:

a) $\ln(t) = t^\alpha \quad t = e^x \quad \ln(e^x) = (e^x)^\alpha \quad x = e^{\alpha x} \mid \ln(\ )$

$\ln(x) = \alpha x \quad \frac{\ln(x)}{x} = \alpha$

b) $\ln(x)/x = \alpha$ Wobei α eine Horizontale Gerade entspricht.

In Aufgabe 2 haben wir das Maximum bei (e,1/e) bestimmt

Für $\alpha = 1/e$ gibt es somit eine Lösung.

Es gibt keine Werten im Wertebereich oberhalb vom 1/e. (Aufgabe 2b)

Für $\alpha > 1/e$ gibt es keine Lösung.

Im unendlichen hat die Funktion die x-Achse als Asymptote. Und ab x=e ist sie streng monoton fallend. Sie wird somit nie mehr unterhalb y=0 kommen.

Für $0 < \alpha < 1/e$ gibt es zwei Lösungen.

Für $\alpha \leq 0$ gibt es jeweils eine Lösung.

c) $a^b < b^a \mid \ln(\ ) \quad b\ln(a) < a\ln(b) \quad |/ab \quad \ln(a)/a < \ln(b)/b$

$\sqrt{2} < \sqrt{3} < e$ Im Intervall (0,e) ist ln(x)/x streng monoton wachsend. (sehe Aufgabe 2)

$f(\sqrt{3})$ ist somit grösser als $f(\sqrt{2})$

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ ist somit kleiner als $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

Lösung

Aufgabe 2

a) Die Ableitung von $f(x)$ ist

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

1) Streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} > 0$$

$$\Rightarrow 1 - \ln(x) > 0 \qquad \forall x \in (0, e)$$

2) Streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \ln(x) < 0 \qquad \forall x \in (e, \infty)$$

b) Extremalstelle:

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$1 - \ln(x) = 0 \quad | + \ln(x)$$

$$1 = \ln(x) \quad | e^{\wedge}$$

$$e = x$$

Wert für $x = e$

$$y = f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

$\rightarrow$ Wertebereich $W \in (-\infty, \frac{1}{e})$

c)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} \longrightarrow \underline{\underline{-\infty}}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\text{Bernoulli}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$$

e) Zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{2\ln(x) - 3}{x^3}}}$$

Krümmung:

1) Konkav: $f''(x) < 0$

$$\Rightarrow \frac{2\ln(x)-3}{x^3} < 0$$

$$\Rightarrow 2\ln(x) - 3 < 0 \qquad \underline{\underline{\forall x \in (0, e^{3/2})}}$$

2) Konvex: $f''(x) > 0$

$$\Rightarrow \frac{2\ln(x)-3}{x^3} > 0$$

$$\Rightarrow 2\ln(x) - 3 > 0 \qquad \underline{\underline{\forall x \in (e^{3/2}, \infty)}}$$

Lösung

Aufgabe 2

f)