Zusätzliche Aufgabe 2:

Allgemeine Logarithmus- und Exponentialfunktionen

Eine Funktion, die die Zuordnungsvorschrift einer anderen Funktion f rückgängig macht oder *invertiert*, wird die **Inverse** oder **Umkehrfunktion** von f genannt. Inverse Funktionen kommen oft in naturwissenschaftlichen Anwendungen vor, vor allem die Exponential- und Logarithmusfunktionen.

Der **natrürliche Logarithmus** oder **ln-Funktion**

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\boxed{y = e^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln y = x.}$$

Das heisst, dass $\ln y$ derjenige Exponent ist, mit dem man e potenzieren muss, um y zu erhalten.

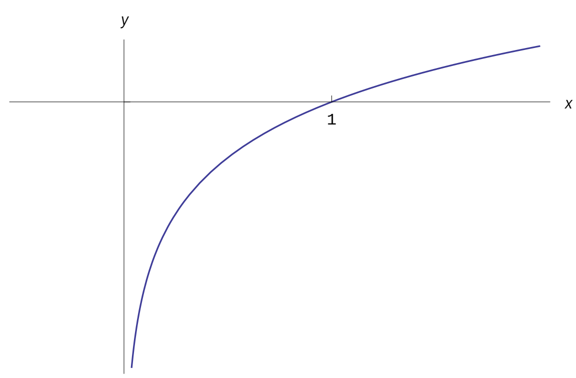
Z.B.

$$1 = e^0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln 1 = 0$$

und

$$\ln e^\pi = \pi.$$

Hier ist ein Sketch des Graphen von $\ln x$:

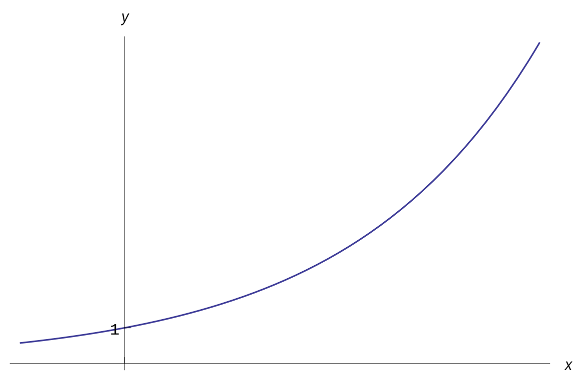


1. Die **allgemeinen Exponentialfunktionen** sind die Funktionen von der Form

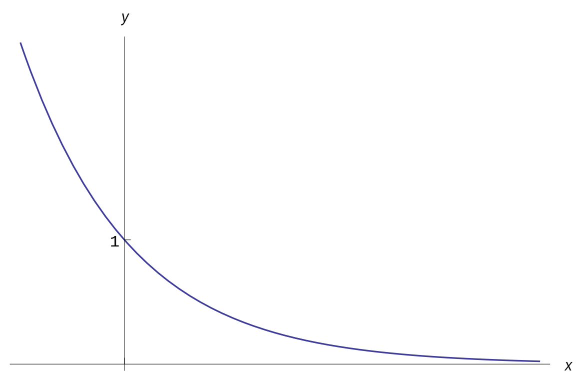
$$a^x,$$

wobei die Basis a positiv ist, $a \neq 1$ und der Exponent ist variabel.

Diese Funktionen sind streng monoton wachsend, falls $a > 1$,



und streng monoton fallend, falls $0 < a < 1$,



Die **Logarithmusfunktion zur Basis** a, $\log_a x$, ist die Umkehrfunktion von a^x:

$$\boxed{y = a^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_a y = x.}$$

Insbesondere ist $\log_e y = \ln y$ die übliche (natürliche) Exponentialfunktion.

a) Berechnen Sie die folgenden Zahlen (ohne Taschenrechner!):

$$\log_{10} 1000, \quad \log_{100} 10, \quad \log_2 64, \quad \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Mit Hilfe der Potenzregeln

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^{x_0} &= a^{x+x_0} \\ \frac{1}{a^x} &= a^{-x} \quad \text{und} \\ (a^x)^k &= a^{x \cdot k} \end{aligned}$$

schreiben Sie die entsprechenden Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \log_a(y \cdot y_0) &= \cdots \\ \log_a\left(\frac{1}{y}\right) &= \cdots \\ \log_a(y^k) &= \cdots \end{aligned}$$

bezüglich $\log_a y$ und $\log_a y_0$ auf.

c) Fassen Sie den folgenden Ausdruck zusammen:

$$2\log_a(3x) + \log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a(9x^2).$$

d) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{(\ln 0.2)t} = 0.04.$$

e) Vorsicht: ein Ausdruck wie 2^{3^4} kann zweideutig sein! Welche Zahl ist grösser,

$$(2^3)^4 \quad \text{oder} \quad 2^{(3^4)}?$$

Ohne Taschenrechner...

f) Schreiben Sie die Gleichung $y = \frac{1}{10}x^{\frac{2}{3}}$ bezüglich der neuen Variablen $X = \log_{10} x$ und $Y = \log_{10} y$ um.

2. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

a) Bestimmen Sie ihre Ableitung, $f'(x)$, und das Monotonieverahlten von f.

In welchem Intervall ist f streng monoton wachsend?

In welchem Intervall ist f streng monoton fallend?

b) Bestimmen Sie den maximalen Wert von f.

Was ist der Wertebereich von f?

Bitte wenden!

c) Was ist $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$?

d) Was ist $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Hinweis: Bernoulli-l'Hôpital.

e) Bestimmen Sie die zweite Ableitung, $f''(x)$, und die Krümmung von $f(x)$.

f) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$.

3. Es sei α eine fixe reelle Zahl. Wir untersuchen jetzt die Gleichung

$$\ln t = t^\alpha \qquad *$$

für $t > 1$.

a) Substituieren Sie $t = e^x$ $(x > 0)$ und logarithmieren Sie, um die Gleichung $*$ als

$$\frac{\ln x}{x} = \alpha \qquad **$$

äquivalent zu schreiben.

b) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $*$?

Hinweis: Betrachten Sie die äquivalente Gleichung $f(x) = \alpha$, wobei f die Funktion von Aufgabe 3 ist, und machen Sie eine Fallunterscheidung.

c) Welche ist die grössere Zahl:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{3}^{\sqrt{2}}?$$

Keinen Taschenrechner verwenden!

Hinweis: Logarithmieren und Umschreiben

$$a^b < b^a \quad \Longleftrightarrow \quad b \ln a < a \ln b \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\ln a}{a}}_{f(a)} < \underbrace{\frac{\ln b}{b}}_{f(b)}.$$

Welche ist grösser, $f\left(\sqrt{2}\right)$ oder $f\left(\sqrt{3}\right)$?