D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

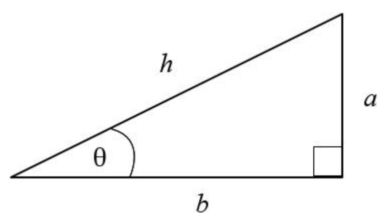
# Zusätzliche Aufgabe 3:

## Trigonometrische Funktionen

mit Hilfe von Taylor, Newton, Bernoulli und l'Hôpital

Der **Sinus** eines Winkels $\theta$ in einem rechtwinkligen Dreieck ist der Quotient der Länge derjenigen Seite, die dem Winkel gegenüber liegt, und der Hypothenuse.[1]

Der **Cosinus** ist der Quotient der Länge der anliegenden Seite und der Hypothenuse.




$$\sin(\theta) = \frac{a}{h}$$

$$\cos(\theta) = \frac{b}{h}$$

Die **Tangens-** und **Kotangens**funktionen sind definiert als

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{und} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

bei denjenigen Winkeln $\theta$, wo die respektiven Nenner nicht verschwinden.

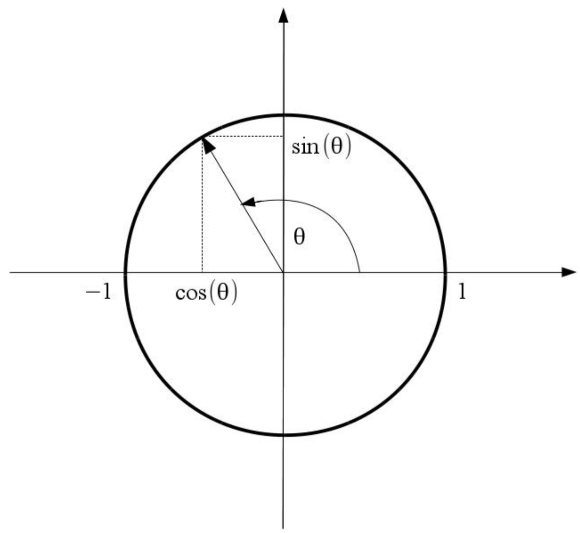
Das Ziel der ersten Aufgabe ist die elementaren Werte von $\sin$ und $\cos$ zu verstehen, wobei nur Folgendes verwendet wird:

- ihre geometrische Definition von oben
- Der Satz von Pythagoras
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
und

[1] Die *Sinusfunktion* kann bis zur Indischen Astronomie im 5ten Jahrhundert zurückverfolgt werden und die Bezeichnung in Sanskrit für sie hat natürlich mit *Bogensehne* zu tun. Das Wort *Sinus* entstand aus einer Lateinischen Fehlübersetzung des Wortes, das im Arabischen verwendet wurde und eine Transkription des Sanskrit Wortes war.

**Bitte wenden!**

- die Ergänzung von $\cos\theta$ und $\sin\theta$ zu beliebigen reellen Werten von $\theta$ mittels Betrachtung von Winkeln im Einheitskreis.

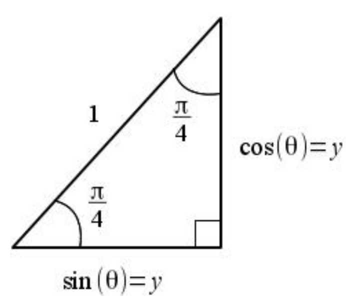



Schliesslich können $\cos\theta$ und $\sin\theta$ Werte in $[-1, 1]$ annehmen und ihre Vorzeichen geben an, in welchem Quadranten sich der Winkel befindet.

**1.** Betrachten Sie folgende Tabelle

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\theta$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $(\infty)$ |

**a)** Überprüfen Sie die Tabellenwerte für $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ anhand eines gleichschenkligen Dreiecks.

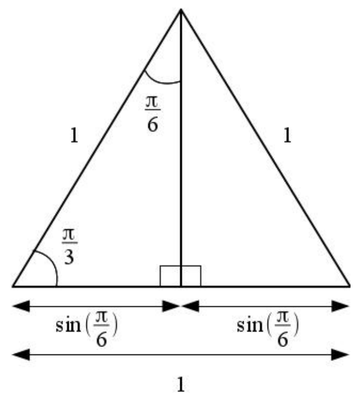



**Siehe nächstes Blatt!**

Hinweis: Pythagoras besagt nun, dass

$$y^2 + y^2 = 1.$$

**b)** Überprüfen Sie die Tabellenwerte für $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ anhand (einer Hälfte) eines gleichseitigen Dreiecks und abermals Verwendung von Pythagoras.




**c)** Überprüfen Sie die übrigen Tabellenwerte. Bei genauerer Betrachtung des obigen Dreiecks sieht man, dass

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} \quad \text{und vice-versa.}$$

**2.** Die **Kleinwinkelnäherungen** trigonometrischer Funktionen sind

$$\left.\begin{array}{r} \sin x \approx x \\ \cos x \approx 1 \\ \tan x \approx x \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \text{für } x \approx 0$$

**a)** Begründen Sie diese Näherungen.

**b)** Es folgt, dass

$$\cos^2 x + \sin^2 x \approx 1 + x^2$$

und nicht mehr genau $1$.

Was ist das Maximum des Fehlers, $x^2$, im Intervall $[0, 0.1]$?

**c)** Was sind die besten polynomialen Näherungen 3. Ordnung dieser drei trigonometischer Funktionen in einer Umgebung von $x_0 = 0$?

**Bitte wenden!**

**d)** Berechnen Sie nun $\cos^2 x + \sin^2 x$ mit Hilfe dieser Polynome 3. Grades und bestimmen Sie das Maximum des Fehlers (jetzt ein Polynom von der Form $Ax^4 + Bx^6$) im Intervall $[0, 0.1]$.

Hinweis: Obwohl die Ableitung der Fehlerfunktion ein Polynom 5. Grades ist, können Sie noch die kritischen Punkte bestimmen.

$$4Ax^3 + 6Bx^5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad 4A + 6Bx^2 = 0.$$

**3.** Wir betrachten die Gleichung[2]

$$x - 0.1 \sin x = 0.85.$$

**a)** Zeigen Sie, dass diese Gleichung wenigstens eine Lösung zwischen $0$ und $\pi$ besitzt.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

**b)** Approximieren Sie diese Lösung, indem Sie zwei Iterationsschritte des Nwetonschen Verfahrens für $f(x) = x - 0.1 \sin x - 0.85$ mit dem Startwert $x_0 = \pi$ berechnen.

Benutzen Sie einen Taschenrechner für die Iteration.

**c)** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und entscheiden Sie dabei jeweils, ob die Regel von Bernoulli-l'Hôpital anwendbar ist oder nicht:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 0.1 \sin x}{2x + \sin x} \qquad \lim_{x \to \pi} \frac{x - 0.1 \sin x}{(x - \pi)^2}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 0.1 \sin x}{e^{\sin x} + 1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 0.1 \sin x}{x^2}$$

---

[2] Zur Bestimmung des zeitlichen Ablaufs der Bewegung eines Planeten hat man die sogenannte *exzentrische Anomalie* $\varphi$ des Planeten zur Zeit $t$. Diese genügt der *Keplerschen Gleichung*

$$\varphi - \varepsilon \sin \varphi = \frac{2\pi t}{U}, \tag{1}$$

wobei die numerische Exzentrizität der Bahnellipse $\varepsilon = 0.1$, und $\dfrac{2\pi t}{U} = 0.85$ mit $U$ die Umlaufzeit und $t$ die seit dem Periheldurchgang verstrichene Zeit bezeichnen, realistische Werte sind.