Dr. Ana Cannas

Zusätzliche Aufgabe 4:

Integration mit rationalen Funktionen und der Logarithmusfunktion

Die Ableitung einer Potenzfunktion x^p, wobei p eine beliebige reelle Zahl (für $x > 0$) ist, ist

$$(x^p)' = p\,x^{p-1}.$$

Es folgt, dass Stammfunktionen von Funktionen der Form $p\,x^{p-1}$ wie folgt aussehen

$$\int p\,x^{p-1}\,dx = x^p + \text{Konst.}$$

Division durch p, *sofern dies nicht Null ist*, liefert

$$\int x^{p-1}\,dx = \frac{x^p}{p} + \text{Konst.}$$

oder, durch Umbenennung des Exponenten ($p = a + 1$), erhält man die folgende Formel, *gültig für* $a \neq -1$:

$$\boxed{\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \text{Konst.}}$$

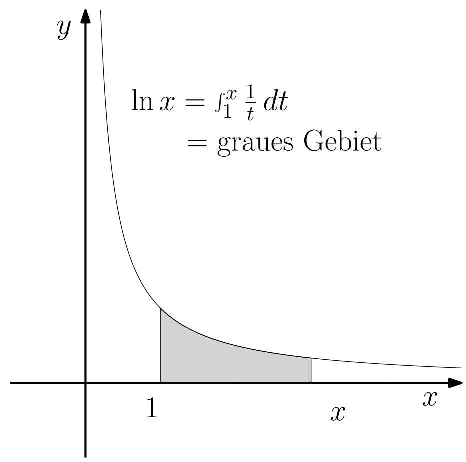
Für den Fall $p = -1$, verwenden wir die Ableitung der Logarithmusfunktion

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dies folgt zum Beispiel aus der Umkehrregel, wobei $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x ist, und $(e^x)' = e^x$.

Geometrisch betrachtet stellt $\ln x$ die Fläche zwischen der x-Achse und des Graphen von $\frac{1}{x}$ mit den vertikalen Streifen zwischen 1 und x liegend, dar, wenn $x > 1$:

Bitte wenden!



Im Allgemeinen (für $x \neq 0$) gilt

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + \text{Konst},}$$

wobei der Fall wenn $x < 0$ von der Kettenregel folgt

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Ebenfalls aus der Kettenregel folgt, dass:

$$\boxed{\int \frac{1}{x-b}\, dx = \ln|x-b| + \text{Konst.}}$$

und, für $a \neq -1$:

$$\boxed{\int (x-b)^a\, dx = \frac{(x-b)^{a+1}}{a+1} + \text{Konst.}}$$

Wenn $a = -n$ (also $a + 1 = -(n-1)$) mit $n \neq 1$, können wir

$$\int \frac{1}{(x-b)^n}\, dx = -\frac{\frac{1}{n-1}}{(x-b)^{n-1}} + \text{Konst.}$$

schreiben.

Siehe nächstes Blatt!

1. Wir können $f(x) = \ln x$ mittels partieller Integration integrieren und eine Hilfsfunktion $g(x) = x$ betrachten:

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx \\
&= \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} - \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \, dx \\
&= x \cdot \ln x - x + \text{Konst.}
\end{aligned}$$

Der Schlüsselpunkt ist die Funktionen so zu wählen, dass sie die Rollen von $f(x)$ und $g(x)$ übernehmen.

a) Benutzen Sie wieder partielle Integration um folgendes unbestimmtes Integral zu finden:

$$\int x \ln x \, dx.$$

b) Benutzen Sie partielle Integration und Teil a) um folgendes unbestimmtes Integral zu finden:

$$\int x \left(\ln x\right)^2 \, dx.$$

c) Benutzen Sie partielle Integration mit $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ um folgendes unbestimmtes Integral zu finden:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$$

d) Was passiert in der vorherigen Aufgabe, c), wenn Sie stattdessen $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ und $g'(x) = \ln x$ wählen, wobei Sie bereits ermittelt haben, dass man $g(x) = x \ln x - x$ nehmen kann? Kann man immernoch $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ bestimmen?

Hinweis: Partielle Integration mit dieser Wahl von $f(x)$ und $g(x)$ liefert

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f(x)} \underbrace{\ln x}_{g'(x)} \, dx &= \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=f(x)} \left(\underbrace{x \ln x - x}_{g(x)} \right) + \int \frac{2}{x^3} \left(x \ln x - x\right) \, dx \\
&= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 2 \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx + \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann man immernoch $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}$ bestimmen!

Bitte wenden!

2. Eine rationale Funktion von der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)},$$

mit $x_1 \neq x_2$ und a, b reell, lässt sich mithilfe der Partialbruchzerlegung wie folgt integrieren:

- Zuerst bestimmt man Koeffizienten A und B, so dass

$$f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

Durch Brucherweiterung folgt, dass die Koeffizienten folgende Gleichung erfüllen müssen:

$$ax + b = A(x-x_1) + B(x-x_2).$$

Da lineare Funktionen von der Form $ax + b$ gleich sind genau dann, wenn ihre Koeffizienten (Steigung a und Konstante b) gleich sind, folgt dass

$$\begin{cases} a &= A + B \\ b &= -x_1 A - x_2 B, \end{cases}$$

wobei sich die Unbekannten A und B bestimmen lassen.

- Wir wissen schon, dass

$$\int \frac{A}{x-x_1}\, dx = A \ln|x-x_1| + \text{Konst.}$$

a) Bestimmen Sie

$$\int \frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}\, dx.$$

b) Bestimmen Sie

$$\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}\, dx.$$

Hinweis: Mitternachtsformel.

c) Bestimmen Sie

$$\int \frac{2x^2-x-3}{x^2-3x+2}\, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision

$$2x^2 - x - 3 = 2(x^2 - 3x + 2) + 5x - 7,$$

um den Integranden umzuschreiben:

$$\frac{2x^2-x-3}{x^2-3x+2} = 2 + \frac{5x-7}{x^2-3x+2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Bestimmen Sie

$$\int \frac{3x^2}{x^2 - 3x + 2}\, dx.$$

e) Können Sie noch

$$\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}\, dx$$

bestimmen?

Hinweis: Bestimmen Sie $A,\ B,\ C$, so dass

$$\frac{2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

f) Bestimmen Sie

$$\int \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 2x}\, dx.$$

g) Wenn es einen doppelten linearen Faktor gibt,

$$\int \frac{cx+d}{(x-a)^2}\, dx,$$

wird die Partialbruchzerlegung angepasst,

$$\frac{cx+d}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$

Bestimmen Sie

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\, dx.$$

3. Wir betrachten die uneigentlichen Integrale der Form

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx,$$

wobei $p > 0$.

a) Wählen Sie eine Stammfunktion für $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ und integrieren Sie

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}\, dx,$$

wobei $0 < \varepsilon < 1$.

Sie müssen den Fall $p = 1$ separat behandeln.

b) Für welche Exponenten p konvergiert das uneigentliche Integral?

Hinweis: Lassen Sie $\varepsilon \to 0^+$.