Dr. Ana Cannas

Zusätzliche Aufgabe 5:

Populationsmodelle

Um die Entwicklung einer Population zu modellieren, gibt es *diskrete Modelle*, wobei die Zeit t bei diskreten begrenzten Einheiten, wie etwa Wochen, Monate oder Jahre, betrachtet wird ($t = 0,\ 1,\ 2, \cdots$) und es gibt *kontinuierliche Modelle*, welche Differentialgleichungen beinhalten, wobei die Zeit t als eine kontinuierliche reelle Variable betrachtet wird.

Unter den kontinuierlichen Modellen werden wir uns auf zwei Modelle konzentrieren, die besonders gebräuchlich sind für alltägliche Situationen: *natürliches Wachstum* und *logistisches Wachstum*.

1. Es gibt jetzt 33 Frösche in einem Teich und diese Population wächst um 25% monatlich.

Sei $B(t)$ die Bevölkerungsanzahl im Monat t, $t = 0,\ 1,\ 2, \cdots$. Als diskretes Modell dieser Population nehmen wir

$$B(t) = 33 \cdot (1.25)^t.$$

Für die folgenden Teilaufgaben dürfen Sie einen Taschenrechner verwenden.

a) Wie viele Frösche gibt es in einem Jahr?

Geben Sie eine ganzzahlige Schätzung.

b) Wie lange dauert es bis es 2000 Frösche gibt?

c) Schreiben Sie die Bevölkerungsanzahl als Exponentialfunktion mit der Basis 2:

$$B(t) = 2^{at+b}.$$

Schätzen Sie die Koeffizienten a und b.

Bitte wenden!

2. Im **natürlichen Wachstum** Modell ist das Wachstum einer Population proportional zur Populationsgrösse. Sei $P(t)$ die Bevölkerungsanzahl zur Zeit t. Dann gilt

$$\frac{dP}{dt} = c\,P \qquad *$$

wobei c üblicherweise eine positive experimentell-geschätzte Proportionalitätskonstante ist.

a) Bestätigen Sie, dass

$$P(t) = P_0\, e^{ct},$$

wobei P_0 die Anfangspopulation ist, die Differentialgleichung des natürlichen Wachstums $*$ erfüllt.

Wir sagen, dass die Population exponentiell wächst.

b) Bestätigen Sie, dass alle Lösungen von $*$ die folgende Gestalt besitzen:

$$P(t) = k\, e^{ct},$$

wobei k eine beliebige reelle Konstante ist (die Lösungen mit $k < 0$ sind nicht relevant in der Populationsdynamik).

Die folgenden Schritte zeigen einen möglichen Weg:

- Zu Zeitpunkten, wo $P(t) \neq 0$, betrachten Sie die verkettete Funktion

  $$f(t) = \ln |P(t)|\,.$$

  Was ist die Ableitung von f?
  Hinweis: Kettenregel.
  Das nennt man eine *logarithmische Differentiation*.
- Zeigen Sie, dass $f(t)$ die Gleichung

  $$f'(t) = c$$

  erfüllt.
  Was ist die allgemeine Lösung $f(t)$ dieser Gleichung?
- Da per Definition

  $$P(t) = \pm e^{f(t)},$$

  gilt, schreiben Sie die gefundene Lösung $P(t)$.
- Was ist mit dem Fall $P(t) = 0$?
  Ist die konstante Nullfunktion auch eine Lösung von $*$?

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt, dass die natürliche Exponentialfunktion $g(t) = e^t$ durch

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} & = g \\ g(0) & = 1 \end{cases}$$

vollständig bestimmt ist.

c) Die Ableitung einer komplizierten Funktion mit Potenzen wie

$$u(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \quad t > 0$$

lässt sich mithilfe der *logarithmischen Differentiation* bestimmen:

$$\frac{d}{dt} \ln |u(t)| = \frac{u'(t)}{u(t)}.$$

Im obigen Fall ergibt das

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{u(t)} &= \frac{d}{dt} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &\overset{\text{Potenzregel}}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \ln(1+t) \right) \\ &\overset{\text{Produktregel}}{=} -\frac{1}{t^2} \ln(1+t) + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left(-\frac{1}{t^2} \ln(1+t) + \frac{1}{t(1+t)} \right) \cdot u(t) \\ &= \left(-\frac{1}{t^2} \ln(1+t) + \frac{1}{t(1+t)} \right) \cdot (1+t)^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(t) = t^{\left(e^t\right)}$$

mithilfe der logarithmischen Differentiation.

3. Im **logistischen Wachstum** Modell betrachtet man eine Population, die einem Wettbewerb mit entscheidenden Ressourcen wie zum Beispiel Essen oder Wasser in einem Lebensraum ausgesetzt ist. Sei $P(t)$ die Populationsgrösse zur Zeit t und sei K die sogenannte *Umweltkapazität* oder *Tragfähigkeit*, d.h. die maximale Populationsgrösse, die in dem Lebensraum für unbegrenzte Zeit existieren kann, ohne diesen nachhaltig zu schädigen. Das logistische Wachstum ist durch die folgende *Verhulst Differentialgleichung* modelliert:

$$\frac{dP}{dt} = cP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

wobei c eine relle Konstante ist. Diese Gleichung lässt sich mit Trennung der Variablen zusammen mit Partialbruchzerlegung lösen.

Die Lösungen sind

$$P(t) = \frac{KP_0e^{ct}}{K + P_0\left(e^{ct} - 1\right)},$$

wobei P_0 die Anfangspopulation ist.

a) Was passiert, wenn die Grösse der Population $P(t)$ im Vergleich zu K sehr klein ist, das heisst

$$\frac{P}{K} \approx 0?$$

Schreiben Sie eine approximierte Differentialgleichung für diesen Fall auf - erkennen Sie diese Gleichung?

b) Was passiert, wenn die Populationsgrösse nahe bei der Umweltkapazität K ist,

$$\frac{P}{K} \approx 1?$$

c) Was passiert, wenn die Populationsgrösse P grösser ist als K?

Was ist der Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} P(t)$?

d) Was sind die Gleichgewichtwerte und deren Stabilität?

e) Die Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = P\left(1 - \frac{P}{3}\right)$$

beschreibt ein Modell für eine Bevölkerungsentwicklung. Steigt die Population oder nimmt sie ab bei den folgenden Anfangswerten:

I. $P_0 = 2$?

II. $P_0 = 4$?

Siehe nächstes Blatt!

4. Im Jahre 1990 betrug die Weltbevölkerung ca. 5.3 Milliarden. Die Geburtenrate in den 1990ern reichte von 35 - 40 Millionen jährlich, während die Sterberate sich zwischen 15 - 20 Millionen pro Jahr bewegte. Wir nehmen an, die maximale Kapazität für die Weltbevölkerung sei 100 Milliarden.

a) Schreiben Sie die logistische Gleichung für diese Daten auf und verwenden sie als mittlere anfängliche Wachstumsrate $\frac{1}{265}$.

b) Benutzen Sie die Gleichung, um die Weltbevölkerung im Jahr 2000 zu bestimmen und vergleichen Sie die Zahl mit der tatsächlichen Bevölkerung von 6.1 Milliarden.

c) Machen Sie eine Vorhersage für die Weltbevölkerung in den Jahren 2100 und 2500.

d) Wie verändern Sich Ihre Prognosen, falls die maximale Kapazität bei 50 Milliarden liegt?