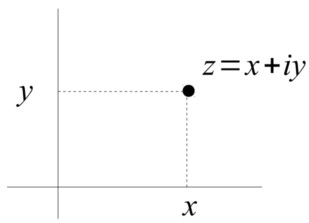
Dr. Ana Cannas

Zusätzliche Aufgabe 6:

Komplexe Zahlen

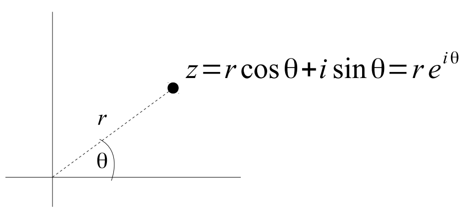
Es gibt zwei Darstellungsformen komplexer Zahlen:

- die **Normalform** oder kartesische Form, wobei die kartesischen Koordinaten als Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z dienen;



$$\begin{cases} x &= \mathrm{Re}z \\ y &= \mathrm{Im}z \end{cases}$$

- und die **Polarform**, die sich äquivalent in der trigonometrischen Form und in der Exponentialform darstellen lässt, wobei die *Polarkoordinaten* r und θ als Betrag und Argument einer komplexen Zahl z dienen.



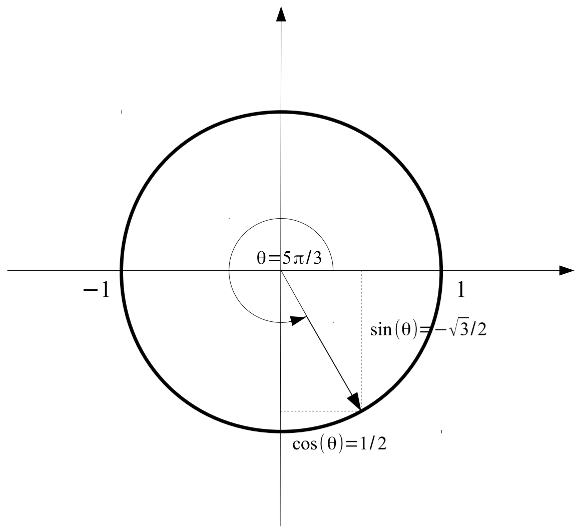
$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

Die **Eulersche Formel**
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
ermöglicht die direkte Umrechnung zwischen der trigonometrischen und der Exponentialform.

Zum Beispiel, hat $z = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$ Betrag $r = 8$, Argument $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, Realteil $x = 8\cos\dfrac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$ und Imaginärteil $y = 8\sin\dfrac{\pi}{6} = 4$, kann also äquivalent geschrieben werden als $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

Nun hat $z = 1 - \sqrt{3}i$ Realteil $x = 1$, Imaginärteil $y = -\sqrt{3}$, Betrag $r = \sqrt{1^2 + 3} = 2$ und sein Argument erfüllt $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2}$ und $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, durch Betrachtung des Einheitskreises folgt, dass $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$:

Bitte wenden!



Die zu $z = x + iy = re^{i\theta}$ **konjugierte** komplexe Zahl ist $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$.

Abhängig vom betrachteten Problem, ist eine oder die andere Darstellung nützlicher. Während für die Addition die Normalform von Vorteil ist,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\mathrm{Re}(z_1+z_2)} + i \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\mathrm{Im}(z_1+z_2)}, \end{aligned}$$

ist die Multiplikation mit der Polarform einfacher,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(r_1 e^{i\theta_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i\theta_2}\right) \\ &= (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Die Polarform ist somit praktischer um Potenzen zu berechnen und n-te Wurzeln zu ziehen. Daraus folgen insbesondere *trigonometrische Formeln* für Summen und Potenzen von Winkeln:

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos(\theta_1 + \theta_2)}_{\mathrm{Re}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right)} &= \underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2}_{\mathrm{Re}\left(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}\right)} \\ \underbrace{\sin(\theta_1 + \theta_2)}_{\mathrm{Im}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right)} &= \underbrace{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2}_{\mathrm{Im}\left(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}\right)} \end{aligned}$$

und aus

$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

Siehe nächstes Blatt!

folgen

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)^n$$
$$\sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)^n .$$

Sei

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

eine komplexe Zahl. Es folgt aus der Multiplikation komplexer Zahlen, dass die **n-ten Wurzeln** von z_0, d.h. die n Lösungen z der Gleichung

$$z^n = z_0,$$

die Zahlen von der Form

$$z = \underbrace{\sqrt[n]{r_0}}_{\text{Betrag}}\, e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

sind.

Der **Fundamentalsatz der Algebra** (Gauss) besagt, dass jede Polynomgleichung der Form

$$a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots, a_n$, mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ genau n komplexe Lösungen hat. Dabei wird jede mehrfache Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt.

1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

a) $\dfrac{1}{1+i}$.

b) $\dfrac{3+4i}{2-i}$.

c) $e^{-1+\pi i}$.

d) $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2012}$.

f) die beiden Quadratwurzeln von i.

2. Bestimmen Sie Betrag und Argument der folgenden Zahlen:

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

c) $-3\sqrt{3} - 3i$.

d) $7e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

e) die drei dritten Wurzeln von $8i$.

f) $\dfrac{\sqrt{3} - i}{\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}}$.

Bitte wenden!

3. Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene.
Eine grundlegende Strategie ist die Gleichungen, welche die Mengen definieren, bezüglich x und y umzuschreiben.

$A := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z - i| = 4 \}$.
$B := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 0 \}$.
$C := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z - i| \leq 2 \}$.
$D := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}\, z| \leq 1/2,\ \mathrm{Im}\, z > 0 \}$.
$E := \{ z \in \mathbb{C} \,|\ |i\bar{z}| = 2,\ \mathrm{Re}(i\bar{z}) = \sqrt{3} \}$.
$F := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, z = \dfrac{3}{2}e^{i\pi t} + \dfrac{1}{2}e^{-i\pi t},\ 0 \leq t \leq 2 \}$

Benutzen Sie die Eulersche Formel, um den Realteil x und den Imaginärteil y eines Punktes z von F zu bestimmen. Sie finden dann die Gleichung $\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 + y^2 = 1,$ die ein Ellipse darstellt.

4. Es sei

$$P(z) = az^2 + bz + c, \qquad z \in \mathbb{C},$$

eine polynomiale Funktion mit reellen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass mit jeder Wurzel z von P auch $\bar{z}$ eine solche Wurzel ist.

b) Angenommen, P nimmt die folgenden Werte an:

$$P(0) = 3, \quad \text{und} \quad P(i) = -2 + 2i.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a,b und c.

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^2 = -9$.
b) $z^3 = 8$.
c) $z^4 = -1$.
d) $z^2 - 2z - 1 = 0$.
e) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.
Hinweis: Das ist eine quadratische Gleichung in $r = z^3$.