Dr. Ana Cannas

Musterlösungen zu Serie 10

1. Hier wollen wir die Gleichung

$$\dim(\text{Lösungsmenge}) = (\text{Anzahl von Variablen}) - \text{Rang der Koeffizientenmatrix}$$

überprüfen. Wichtig ist dabei, dass wir die **homogenen** Gleichungssysteme betrachten.

S7A1 a) Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also hat das Gleichungssystem keinen freien Parameter und somit eine eindeutige Lösung, einen Punkt. Der Lösungsraum ist somit 0-dimensional. Der Rang der Matrix ist 2 und die Anzahl Variablen ist ebenfalls 2:

$$0 = 2 - 2.$$

b) Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also hat das Gleichungssystem einen freien Parameter und Rang 1. Der Lösungsraum ist somit eine Gerade, also 1-dimensional. Die Anzahl Variablen ist 2:

$$1 = 2 - 1.$$

c) Hier handelt es sich um dasselbe homogene LGS wie in **b)**.

S7A2 a) Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 13 & 7 \\ 7 & 22 & 13 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also hat das Gleichungssystem einen freien Parameter und Rang 2. Der Lösungsraum ist somit eine Gerade, also 1-dimensional. Die Anzahl Variablen ist 3:

$$1 = 3 - 2.$$

b) Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also hat das Gleichungssystem keinen freien Parameter und Rang 3. Der Lösungsraum ist somit ein Punkt, also 0-dimensional. Die Anzahl Variablen ist 3:

$$0 = 3 - 3.$$

c) Hier handelt es sich um dasselbe homogene LGS wie in Teilaufgabe **a)**.

S7A3 Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (k^2-5) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (k^2-4) \end{pmatrix}.$$

a) Für $k \neq \pm 2$ hat das homogene LGS Rang 3 und somit keinen freien Parameter. Es ist

$$0 = 3 - 3.$$

b) Für $k = \pm 2$ hat das homogene LGS Rang 2 und somit einen freien Parameter. Es ist

$$1 = 3 - 2.$$

S7A4 Es gibt 3 Variablen und eine eindeutige Lösung. Die Koeffizientenmatrix hat somit vollen Rang gleich 3 und man überprüft

$$0 = 3 - 3.$$

S7A5 **a)** Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat also Rang 2 und somit einen freien Parameter. Die Anzahl der Variablen ist 3. Die Lösungsmenge ist eine Gerade und es ist

$$1 = 3 - 2.$$

b) Gaussalgorithmus liefert die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

mit Rang 4. Die Lösungsmenge ist also eine Gerade, wobei die Anzahl der Variablen 5 ist

$$1 = 5 - 4.$$

c) Eine Gleichung mit 3 Variablen bedeutet eine Koeffizientenmatrix mit Rang 1 und 2 freien Parametern. Die Lösungsmenge ist eine Ebene

$$2 = 3 - 1.$$

d) Die beiden Gleichungen des homogenen Systems sind gleich. Somit hat die Koeffizientenmatrix Rang 1 bei 3 Variablen. Die Lösungsmenge ist eine Ebene

$$2 = 3 - 1.$$

e) Gaussalgorithmus liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Rang 3 hat bei 4 Variablen. Somit ist die Lösungsmenge eine Gerade

$$1 = 4 - 3.$$

2. **a)** Elementare Zeilenoperationen liefern

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -6+s \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 2 & -8 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für $s \neq 1$ hat das System also keine Lösung. Für $s = 1$ ist

$$4x_1 - 2x_2 - 11x_5 = -12, \qquad 2x_3 + 3x_5 = 2, \qquad x_4 - 2x_5 = -1.$$

Bitte wenden!

Wählen wir z.B. $x_2 = r$ und $x_5 = t$ mit $r, t \in \mathbb{R}$ als freie Parameter, so ist also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung, d.h. die Lösungen liegen auf der von

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

aufgespannten Ebene durch den Punkt $(-3, 0, 1, -1)$.

b) Aus Teil **a)** folgt, dass $\operatorname{rang} A = 3$ und daher $\det A = 0$.

c) Bestimmung der Dimension:

$$\dim(\{\text{Lsg von } A\vec{x} = \vec{0}\}) = \dim(\ker(A)) = n - \text{Rang}(A) = 5 - 3 = 2.$$

Zur Erinnerung, eine Gleichung entspricht einer Bedingung an den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Hier haben wir ursprünglich 5 Gleichungen gegeben, aber der Gaussalgorithmus (Teilaufgaben a)) liefert, dass nur 3 der Bedinungen linear unabhängig sind. Unser Gleichungssystem erlaubt also 2 freie Parameter, d.h. der Lösungsraum ist 2-dimensional.
Bestimmung der Lösungsmenge: Der Gaussalgorithmus (Teilaufgabe a)) liefert

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Das entspricht dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 \qquad\quad - 11x_5 &= 0 \\ 2x_3 \; + \; 3x_5 &= 0 \\ x_4 - \; 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Da wir 2 freie Parameter haben, setzen wir $x_5 = t$ und $x_2 = r$ mit t, r in $\mathbb{R}$. Das gibt oben eingesetzt

$$\begin{aligned} x_4 &= 2t \\ x_3 &= -\frac{3}{2}t \\ x_1 &= \frac{1}{2}r + \frac{11}{4}t. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Da die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ eine lineare Gleichung ist, unterscheiden sich zwei beliebige Lösungen durch eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, $A\vec{x} = \vec{0}$. Insbesondere wissen wir aus der Teilaufgabe **a)**, dass der Vektor $\vec{x} = (-3, 0, 1, -1, 0)$ eine Lösung der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist und somit müssen die beiden Vektoren $\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0\right)$ und $\left(\frac{11}{4}, 0, -\frac{3}{2}, 2, 1\right)$ den Nullraum der Matrix aufspannen.

3. Gaussalgorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 2k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k & k(k-1) \\ 0 & 0 & k(k-1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k(k-1) \end{pmatrix}.$$

a) Es ist $\operatorname{Rang} A = 1$, wenn die letzten beiden Spalten keinen "führenden" Eintrag haben, also $k = 0$ und $k(k-1) = 0$. Dies ist erfüllt für $k = 0$.

b) Es ist $\operatorname{Rang} A = 2$, wenn genau eine der letzten beiden Spalten keinen "führenden" Eintrag haben, also entweder wenn $k = 0$ aber $k(k-1) \neq 0$ oder falls $k \neq 0$ aber $k(k-1) = 0$. Dies ist erfüllt für $k = 1$.

c) Es ist $\operatorname{Rang} A = 3$, wenn alle drei Spalten einen "führenden" Eintrag haben, also wenn $k \neq 0$ und $k(k-1) \neq 0$. Dies ist erfüllt für $k \notin \{0, 1\}$.

4. **a)** Eine Matrix ist nur dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat. Daher muss $\operatorname{Rang}(A) = 3$.

b) Es ist $\vec{x} = A^{-1}A\vec{x}$, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9 \\ -2+6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist $\det A = (\det A^{-1})^{-1}$, wobei

$$\det A^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18,$$

Bitte wenden!

und für

$$B := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $\det B = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$. Also ist

$$\begin{aligned} \det(3AB^2) &= \det(3A)\det B^2 = 3^3 \det A(\det B)^2 \\ &= 27\left(\det A^{-1}\right)^{-1}(\det B)^2 = \frac{27 \cdot 36}{18} = 54. \end{aligned}$$

5. **a)** Die Matrix A hat Rang 3 genau dann, wenn die Determinante nicht Null ist. Es ist

$$\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = 2(-3-\alpha) + \alpha + 2 = -4 - \alpha,$$

also ist $\det A \neq 0$ fü alle $\alpha \neq -4$.

b) Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat dann keine eindeutige Lösung, wenn der Nullraum der Matrix nicht trivial ist und das ist genau dann der Fall, wenn A nicht vollen Rang hat, resp. $\det(A) = 0$. Aus **a)** folgt, dass dann $\alpha = -4$. Mit dieser Wahl von α sind die Spaltenvektoren von A notwendigerweise komplanar. Z.B. gilbt

$$4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (*).$$

c) $\vec{b}$ liegt im Spaltenraum von A, wenn das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist. Es folgt mit dem Gaussverfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & \beta \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & \beta + 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right),$$

woraus sich die Bedingung $\beta = 0$ ergibt. Die Lösungen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ müssen

$$y - z = -1 \quad \text{und} \quad x + 2y + 2z = 2$$

Siehe nächstes Blatt!

erfüllen. Wir setzten $z =: t,\ t \in \mathbb{R}$ und erhalten $y = -1 + t$ und $x = 4 - t$. Dann ist die Lösungsschar gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 - 4t \\ -1 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (**).$$

Das Gleichungssystem hat also

$i)$ keine Lösung für $\beta \neq 0$

$ii)$ die Lösungschar $(**)$, falls $\beta = 0$.

6. Die Antwort auf **a)** und **b)** lautet "Ja", denn das Gaussverfahren liefert äquivalente Gleichungssysteme. Wir bezeichnen die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{A}$, die durch das Gaussverfahren entsteht. Ausserdem ist der Nullraum von A per Definition die Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ und damit auch die Lösungsmenge der Gleichung $\widetilde{A}\vec{x} = \vec{0}$.

a) Falls man solch eine Gleichung nicht direkt sieht, kann man dafür einfach die Lösbarkeit des Systems $\widetilde{A}\vec{x} = \vec{b}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

überprüfen. Dann muss ein Vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) im Lösunsraum

$$x_3 - x_4 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 + 3x_4 = 2$$

erfüllen. Das ist offensichtlich lösbar und somit befindet sich $\vec{b}$ im Spaltenraum von $\widetilde{A}$, resp. A. Um die Lösungsschar zu bestimmen setzten wir $x_4 =: s$ und $x_1 =: t$ mit $t, s \in \mathbb{R}$. Dann ist $x_2 = 2 - 3s$ und $x_3 = 4 + s$ und somit ist die Lösungsschar gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 - 3s \\ 4 + s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Alternativ Dafür überprüfen wir zuerst, ob $\vec{b}$ im Spaltenraum, respektive im Spaltenraum von A liegt. Dies ist offensichtlich der Fall, da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Somit ist der Vektor $\vec{x}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Lösungsraum des Gleichungssystems.

Da die Matrix jedoch nicht vollen Rang hat, setzt sich die Lösungsschar des Gleichungssystems zusammen aus Vektoren, die im Nullraum von A liegen, sowie einer speziellen Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Dafür ermitteln wir den Nullraum der Matrix. Ein Vektor $\vec{x}_N = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ liegt im Nullraum von A, wenn er im Nullraum von $\widetilde{A}$ liegt und muss somit

$$x_3 = x_4, \quad x_2 = -3x_4$$

erfüllen. Dann wählen wir z.B. $x_1 = t$ und $x_4 = s$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ und erhalten $\vec{x}_N = (1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 1)$. Somit ist die Lösungsschar gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

was dieselbe Lösungsschar wie oben definiert.

b) Ein Vektor $\vec{x}_N = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ liegt im Nullraum von A, wenn er im Nullraum von $\widetilde{A}$ liegt und somit das LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also muss

$$x_3 = x_4, \quad x_2 = -3x_4$$

erfüllen. Dann wählen wir z.B. $x_1 = t$ und $x_4 = s$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$\vec{x}_N = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

c) Nein, der Spaltenraum bleibt durch den Gaussalgorithmus nicht erhalten, denn während des Gaussalgorithmus werden die Zeilen umgeformt, was die Spalten vollkommen zufällig verändert. Nur die Dimension des Spaltenraumes bleibt erhalten. Zum Beispiel könnte hier sein, dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir sehen, dass z.B. die Spalte $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Spaltenraum dieser Matrix A ist, während alle Vektoren im Spaltenraum der Stufenformmatrix $\widetilde{A}$ die dritte Komponente gleich Null haben.