Musterlösungen zu Serie 11

1. **a)** Bestimmung der Eigenwerte

Die Eigenwerte einer Matrix A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, $p(\lambda)$, wobei

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$

Hier ist

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 8 \\ 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(9-\lambda).$$

Das heisst, die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = 9$.

Bestimmung der Basis der Eigenräume

Ein Eigenvektor v erfüllt $Av = \lambda v$, das heisst $(A - \lambda E_n)v = 0$.
Gesucht ist also eine Basis von $\ker(A - \lambda E_n)$.

$\underline{\lambda_1}$: $\mathcal{E}_7 = \ker(A - \lambda_1) = \ker\begin{pmatrix} 7-7 & 8 \\ 0 & 9-7 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2}$: $\mathcal{E}_9 = \ker(A - \lambda_2) = \ker\begin{pmatrix} 7-9 & 8 \\ 0 & 9-9 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das heisst wir haben eine Eigenbasis, nämlich $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Eigenwerte: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$; Eigenräume: $\mathcal{E}_2 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_0 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Eigenbasis: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Eigenwerte: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$; Eigenräume: $\mathcal{E}_4 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{E}_9 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Eigenbasis: $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

d) Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; Eigenräume: $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da die Matrix eine (2×2)-Matrix ist, jedoch nur ein Eigenvektor besitzt gibt es keine Eigenbasis.

e) Es gibt keine reellwertige Eigenwerte, denn das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$.

f) Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$;

Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_2 - 2 \end{pmatrix} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2.27 \end{pmatrix} \right\}$.

g) Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$; Eigenbasis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

h) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

i) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

j) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$; $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_2 = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gibt keine Eigenbasis.

k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

l) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gibt keine Eigenbasis.

m) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

n) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

o) $\lambda_1 = 0$, es gibt keine weiteren reellwertige Eigenwerte; $\mathcal{E}_0 = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Die Laplacesche Entwicklung nach der ersten Spalte gibt

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1 + 3 = 4 - a.$$

Daher ist A genau dann regulär wenn $a \neq 4$.

b) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & a-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\left((\lambda+1)(a-\lambda) - 1\right) - 3\lambda + 3 \\ &= (\lambda^2 - 1)(a - \lambda) - 4\lambda + 4 = -\lambda^3 + a\lambda^2 - 3\lambda + 4 - a. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$p_A(-2) = 3a + 18 = 3(a+6)$$

Somit ist $\lambda_1 = -2$ bloss für $a = -6$ ein Eigenwert von A. Mit dieser Parameterwahl ist $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10$ und eine Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10 = \big(\lambda + 2\big)\big(-\lambda^2 - 4\lambda + 5\big). \\ \underline{\quad \lambda^3 + 2\lambda^2} \\ \qquad\quad -4\lambda^2 - 3\lambda \\ \qquad\quad \underline{\quad 4\lambda^2 + 8\lambda} \\ \qquad\qquad\qquad 5\lambda + 10 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-5\lambda - 10} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Die übrigen Eigenwerte von A sind demnach

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = -2 \mp 3,$$

also $\lambda_2 = -5$ und $\lambda_3 = 1$.

c) Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4a-4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{4}{3}(a-1) \end{pmatrix},$$

es muss also $a = 4$ sein.

Bitte wenden!

3. Die Idee zur Lösung des Problems ist, ein 2-dimensionales Problem mit Matrizenschreibweise darzustellen. Das funktioniert folgendermassen:
Setze $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$ und finde A in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $A\vec{v}(t) = \vec{v}(t+1)$.
Die rekursiven Bedingungen geben, dass $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Induktiv kann man ermitteln, dass

$$\vec{v}(t) = A^t \vec{v}(0).$$

a) Der Anfangsvektor ist $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$. Wird die Matrix A auf $\vec{v}(0)$ angewendet, sieht man, dass diese Anfangsbedingungen genau einem Eigenvektor der Matrix A entsprechen, denn

$$A\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Das heisst, dass die allgemeine Lösung entlang dieses Eigenvektors iteriert,

$$\vec{v}(t) = A^t \vec{v}(0) = 2^t \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Daraus können wir die expliziten Formeln direkt ablesen,

$$h(t) = f(t) = 100 \cdot 2^t.$$

b) Analog zu Aufgabe a). Der Anfangsvektor ist $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$.
Die Anwendung der Matrix A auf $\vec{v}(0)$ zeigt wieder, dass dieser ein Eigenvektor von A ist, denn

$$A\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist,

$$\vec{v}(t) = A^t \vec{v}(0) = 3^t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix},$$

entlang dieses Eigenvektors. Dies ergibt die expliziten Formeln

$$h(t) = 200 \cdot 3^t$$
$$f(t) = 100 \cdot 3^t.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Hier ist $\vec{v}\,(0) = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \end{pmatrix}$. Für diese Teilaufgabe ist entscheidend, dass wir in Teilaufgaben a) und b) bereits zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden haben, und da die Matrix A eine (2×2)-Matrix ist, bilden diese eine Eigenbasis von A (das heisst, A ist diagonalisierbar). Um die allgemeine Lösung zu bestimmen schreiben wir den Anfangsvektor $\vec{v}\,(0)$ als Linearkombination dieser Eigenvektoren, das heisst

$$\vec{v}\,(0) = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix},$$

so dass

$$\begin{aligned} \vec{v}\,(t) = A^t \vec{v}\,(0) &= A^t 4 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + A^t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 2^t \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + 3^t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir Teilaufgaben a) und b) verwendet haben.
Die expliziten Formeln sind also

$$\begin{aligned} h\,(t) &= 400 \cdot 2^t + 200 \cdot 3^t \\ f\,(t) &= 400 \cdot 2^t + 100 \cdot 3^t. \end{aligned}$$

4. a) Bestimmung der Eigenwerte

charakteristisches Polyoms: $p\,(\lambda)$,

$$\begin{aligned} p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda E_n) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)\,(-2-\lambda) - (-2)\,5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2}$.
Das heisst, die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$.
Bemerkung 1: Für eine relle Matrix gilt: Sobald wir eine nicht-reelle Nullstelle gefunden haben, wissen wir automatisch einen zweiten Eigenwert und Eigenvektor denn, falls λ ein Eigenwert mit Eigenvektor v ist, dann gilt

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \bar{\lambda}\bar{v},$$

das heisst $\bar{\lambda}$ ist Eigenwert von A mit Eigenvektor $\bar{v}$.

Bestimmung der Eigenvektoren

Bitte wenden!

Ein Eigenvektor v erfüllt $Av = \lambda v$, das heisst $(A - \lambda E_n)\, v = 0$, wobei v nicht der Nullvektor sein darf.
Gesucht ist eine Basis von $\ker (A - \lambda E_n)$, wobei dieser Kern ganz bestimmt nicht trivial ist, da die Eigenwerte genau so gewählt wurden, dass es einen nicht Null Vektor gibt, der im Kern enthalten ist.
$\underline{\lambda_1}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\{1+i\}} &= \ker \begin{pmatrix} 4-(1+i) & 5 \\ -2 & -2-(1-i) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{span} \begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Bemerkung 2: Die Ermittlung des Eigenvektors ist ganz leicht. Wir wissen, dass sich ein nicht trivialer Vektor im Kern befindet. Das heisst die Zeilen sind linear abhängig und wir müssen uns hier (da $n = 2$) nur um die "elimination" einer Zeile kümmern. Nehmen wir zum Beispiel die erste Zeile, dann müssen wir einfach nur "konträre" Vielfache subtrahieren, konkret $(3-i)(-5) + 5 \cdot (3-i)\,(= 0)$.
Bemerkung 1 liefert uns nun direkt einen Eigenvektor für λ_2, nämlich

$$\overline{\begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix}.$$

Die Eigenbasis ist also $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix} \right\}$.

b) charakteristisches Polynom: $(-\lambda)^2 (1-\lambda)^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$
Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 1$
Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
wobei $\mathcal{E}_0 = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) charakteristisches Polynom: $-\lambda^3 - \lambda$
Eigenwerte: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$
Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$
Eigenbasis: $\{v_1, v_2, v_3\}$

Siehe nächstes Blatt!

d) charakteristisches Polynom: $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$
Eigenwerte: $\lambda_{1;2} = 0,\ \lambda_{3,4} = 0$
Eigenvektoren: $\mathcal{E}_0 = \operatorname{span}\{e_1, e_3\}$ und $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span}\{e_2\}$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren bezeichnen. Wir haben eine 4-reihige Matrix, aber nur 3 linear unabhängige Eigenvektoren, das heisst die Matrix besitzt keine Eigenbasis.

5. a) Fact: Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist.
Für A verwenden wir die Formel zur Berechnung der Determinante für (2×2)-Matrizen.

$$\det A = (3-i)(-3+i) - (-2)\cdot 4 = 6i.$$

Also ist die Matrix A intvertierbar.

Für B wenden wir die Laplacesche Entwicklung nach der letzten Spalte an

$$\begin{aligned}\det B &= 0 + 0 + (-1)^{3+3}(3+4i)\det\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1+2i & 2-i\end{pmatrix} \\ &= (3+4i)\left(i(2-i) - (1+2i)\cdot 1\right) \\ &= (3+4i)(2i+1-1-2i) = 0.\end{aligned}$$

Also ist auch B nicht invertierbar.

b) Wir verwenden den Gauss-Algorithmus zur Berechnung der Inversen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & 1 & 0 \\ -i & 1+i & 0 & 1\end{array}\right) \overset{II+iI}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & 1 & 0 \\ 0 & -1+i & i & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{II\cdot\frac{1}{-1+i}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{-(1+i)}{2}\end{array}\right) \overset{I-2iII}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -i & i-1 \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2}\end{array}\right)$$

Das heisst $C^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2}\end{pmatrix}$.

6. Das charakteristische Polynom von R_α

$$\begin{aligned} p_{R_\alpha}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda\end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1\end{aligned}$$

hat die Wurzeln

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \\ &= \cos\alpha \pm i\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}\end{aligned}$$

Daher hat R_α

Bitte wenden!

- den doppelten Eigenwert 1 für $\alpha = 0$,
- den doppelten Eigenwert -1 für $\alpha = \pi$ und
- sonst das konjugierte Paar $e^{\pm i\alpha}$ komplexer Eigenwerte.

In den ersten beiden Fällen ist offenbar jeder von $\vec{0}$ verschiedene Vektor in der Ebene ein Eigenvektor. Das sieht man auch leicht geometrisch ein, denn da $\vec{x} \mapsto R_\alpha \vec{x}$ allgemein eine Drehung in der Ebene um den Winkel α beschreibt, ist insbesondere R_0 die Identität und R_π die Punktspiegelung am Koordinatenursprung.

Für die übrigen Winkel erhält man

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - e^{i\alpha} & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - e^{i\alpha} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - e^{-i\alpha} & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & i\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

und damit die (komplexen) Eigenvektoren $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ bzw. $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\mu \in \mathbb{C}$.

Das charakteristische Polynom von S_α

$$\begin{aligned} p_{s_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} &= (\cos\alpha - \lambda)(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha \\ &= (\lambda - \cos\alpha)(\lambda + \cos\alpha) - \sin^2\alpha = \lambda^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

hat für alle α die Wurzeln $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Wegen

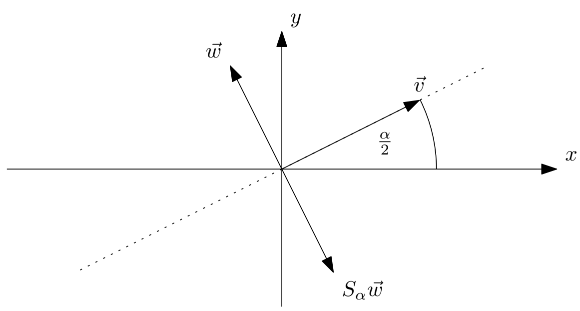
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

sind die Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 von der Form

$$\mu \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mu \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Dies sieht man auch ohne Rechnung leicht geometrisch ein: die Abbildung $\vec{x} \mapsto S_\alpha \vec{x}$ beschreibt eine Spiegelung in der Ebene, wobei die Spiegelungsachse mit der x-Achse den Winkel $\alpha/2$ einschliesst. Offenbar bleiben genau die Ortsvektoren auf dieser Achse bei der Spiegelung unverändert während genau die Orstvektoren am Koordinatenursprung gespiegelt werden, die auf der dazu orthogonalen Geraden liegen.

Siehe nächstes Blatt!



$$\vec{v} = |\vec{v}| \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = |\vec{w}| \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_\alpha \vec{w} = |\vec{w}| \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = -\vec{w}$$

7. **a)** Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der neugeborenen, der einen Monat alten und der mehr als einen Monat alten Kaninchenpaare nach n Monaten:

n	neugeboren	einen Monat alt	älter als einen Monat	F_n
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8
6	5	3	5	13
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Allgemein ergibt sich offenbar $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist demnach

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+1} + F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix},$$

d.h. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

hat die Wurzeln $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, d.h. A hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = g \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 1 - g, \qquad \text{wobei} \qquad g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

den Goldenen Schnitt bezeichnet. Wegen

$$\begin{pmatrix} -g & 1 \\ 1 & 1-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g & 1 \\ 1 & -\frac{1}{g} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 1 \\ 1 & g \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

sind die zugehörigen Eigenvektoren von der Form

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mu \begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Da die Matrix A nach **b)** diagonalisierbar ist, besitzt $\vec{x}_0$ für jede Wahl von Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zu λ_2 eine (eindeutige) Darstellung

$$\vec{x}_0 = \mu\,\vec{v}_1 + \nu\,\vec{v}_2 \qquad \text{für gewisse} \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Also ist $\vec{x}_1 = A\,\vec{x}_0 = \mu\,\lambda_1\,\vec{v}_1 + \nu\,\lambda_2\,\vec{v}_2$ und allgemein

$$\vec{x}_n = A^n\,\vec{x}_0 = \mu\,\lambda_1^n\,\vec{v}_1 + \nu\,\lambda_2^n\,\vec{v}_2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wählen wir für $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ z.B. die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-g \end{pmatrix},$$

so folgt $\left(\begin{array}{cc|c} \mu & \nu & 1 \\ g\,\mu & (1-g)\,\nu & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mu & \nu & 1 \\ 0 & (1-2g)\,\nu & 1-g \end{array}\right)$, also

$$\nu = \frac{g-1}{2g-1} \qquad \text{und} \qquad \mu = 1 - \nu = \frac{g}{2g-1}$$

und damit

$$\begin{aligned} F_n = \mu\,\lambda_1^n + \nu\,\lambda_2^n &= \frac{g}{2g-1}\,g^n + \frac{g-1}{2g-1}\,(1-g)^n \\ &= \frac{g^{n+1}}{2g-1} - \frac{(1-g)^{n+1}}{2g-1} = \frac{g^{n+1} - (1-g)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte *Formel von Binet*.