Dr. Ana Cannas

Musterlösungen zu Serie 12

1. **a)** Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{\vec{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A\vec{x}; \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung eines Systems der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit einer 2×2-Matrix A mit verschiedenen Eigenwerten ist allgemein gegeben durch

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \tag{1}$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte (EW) der Matrix A sind, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ zugehörigen Eigenvektoren (EV) bezeichnen und c_1, c_2 Konstanten sind, die durch die Anfangsbediengung $\vec{x}(0)$ bestimmt werden. Es gelten also:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda_1\vec{v}_1, \qquad \vec{v}_1 \neq 0 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda_2\vec{v}_2, \qquad \vec{v}_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Es genügt diese Relationen zu verwenden, um zu überprüfen , dass (1) wirklich eine Lösung des Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist. Ferner folgt aus (2), dass die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ (wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$) linear unabhängig sind.

Es ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 12 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35, \end{aligned}$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 35}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+35}}{2} = 1 \pm 6,$$

d.h. $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -5$.

Einsetzen dieser Werte in (2) liefert die EV:

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

und die allgemeine Lösung (1) des AWP lautet:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbediengung liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}.$$

Also erhalten wir $\vec{x}(t) = \dfrac{1}{2}\, e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\, e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten das AWP

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} =: A\vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$ also sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ die EW.

Für die EV erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

so dass

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

die allgemeine (*komplexe*) Lösung ist.

Aus der Anfangsbediengung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2, \\ 3 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

und somit $c_1 = \frac{1}{2}\,(1 - 3i)$, $c_2 = \frac{1}{2}\,(1 + 3i)$.

Die Lösung des AWP ist also

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{i}\right) e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{i}\right) e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ -\frac{e^{it}+e^{-it}}{2i} + 3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -\sin t + 3\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Bemerkung: Wegen $\ddot{x} = \dot{y} = -x$, gilt

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = y(0) = 3.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist (vgl. Serie 2)

$$x(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

und mit $1 = x(0) = a$ und $3 = y(0) = b$ erhalten wir wiederum

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + 3\sin t \\ y(t) &= \dot{x}(t) = -\sin t + 3\cos t. \end{aligned}$$

Allgemein ist m Fall nichtreeller (also komplex konjugierter) EW λ, $\bar{\lambda}$ mit zugehörigen EV $\vec{w}$, $\bar{\vec{w}}$ die allgemeine Lösung eines (2×2)-Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ eine Linearkombination der Funktionen $e^{\lambda t}\vec{w}$ und $e^{\bar{\lambda} t}\bar{\vec{w}}$ und also, falls die Koeffizientenmatrix A reell ist, auch der Funktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{w}\right) &= e^{\gamma t}\left(\cos(\omega t)\vec{u} - \sin(\omega t)\vec{v}\right) \qquad\qquad \text{und} \\ \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{w}\right) &= e^{\gamma t}\left(\sin(\omega t)\vec{u} + \cos(\omega t)\vec{v}\right), \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \gamma + i\omega$ und $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$. Es gilt also

$$\vec{x}(t) = e^{\gamma t}\left(\left(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right)\vec{u} + \left(-c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t)\right)\vec{v}\right) \tag{3}$$

mit Konstanten c_1, c_2, die durch $\vec{x}(0) = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$ bestimmt sind.

Für das gegebene AWP sind $\gamma = 0$, $\omega = 1$,

$$\vec{u} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Einsetzen in (3) liefert wiederum die obige Lösung.

c) Wir schreiben

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakeristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1, \end{aligned}$$

also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 =: \lambda$ ein doppelter Eigenwert.

Dies ist ein weiterer Spezialfall des (2×2)-Problems. Die Matrix A ist *nicht diagonalisierbar*. Es gibt nur einen EW λ und also nur einen EV $\vec{v}$ (bis auf lineare

Bitte wenden!

Vielfache, und ausser im trivialem Fall $A = \lambda E_2$). In diesem Spezialfall wird die allgemeine Lösung nicht durch $\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$ gegeben, da dies zu

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\vec{v} =: c e^{\lambda t}\vec{v}$$

und also $\vec{x}(0) = c\vec{v}$ führen würde. Dies *kann nicht* die allgemeine Lösung sein, da als Anfangsbedingungen nur Vielfache von $\vec{v}$ in Betracht kommen.

Statt dessen, wird in diesem Spezialfall die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 t e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\vec{w}, \tag{4}$$

wobei $\vec{w}$ so zu wählen ist, dass $(A - \lambda E_2)\vec{w} = \vec{v}$. Es ist leicht einzusehen, dass die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und (4) die DGL $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ erfüllt.

Für die gegebene Gleichung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{also z.B.} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also z.B.} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

und somit $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 2c_1 + 2c_2 t \\ c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix}$.

Aus $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_2 = 2$.

Schliesslich ist $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 4 + 4t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}$.

2. **a)** Wir betrachten das AWP

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 10\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2) - (-2)\cdot 2$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3\lambda - 6 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Somit sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

Siehe nächstes Blatt!

die Eigenwerte von A. Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ergeben sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Mithin ist

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

die allgemeine Lösung des homogenen Problems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

Um eine partikuläre Lösung $\vec{x}_p$ der inhomogenen Gleichung $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ zu finden, bemerken wir zunächst, dass die Komponenten von $\vec{b}(t)$ lineare Kombinationen trigonometrischer Funktionen sind. Daher führt der Ansatz

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix}, \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

sicher auf eine Lösung. Für diese Lösung gelten

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}_p(t) &= \begin{pmatrix} -A\sin t + B\cos t \\ -C\sin t + D\cos t \end{pmatrix}, \\
A\,\vec{x}_p(t) + \vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3A + 2C + 10)\cos t + (3B + 2D)\sin t \\ (-2A - 2C)\cos t + (-2B - 2D)\sin t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

für alle t (insbesondere $t = 0$ und $t = \pi/2$) und also

$$\begin{aligned}
3A - B + 2C &= -10, & A + 3B + 2D &= 0, \\
2A + 2C + D &= 0, & 2B - C + 2D &= 0.
\end{aligned}$$

Das Gaussverfahren liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

Bitte wenden!

also $D = 2$, $C = 6$, $B = 1$ und $A = -7$. Somit ist

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -7\cos t + \sin t \\ 6\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Da die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Problems notwendig eine Lösung des homogenen Problems, d.h. von der Form (6) ist, ist die allgemeine Lösung des AWP (5) von der Form

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\cos t + \sin t \\ 6\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also $2c_1 + c_2 = c_1 + 2c_2 = 3$ und somit $c_1 = c_2 = 1$.

Also ist

$$\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\cos t + \sin t \\ 6\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}.$$

b) Es seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= -2 + \lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ergeben sich

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad &\Rightarrow \qquad &\vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad &c \in \mathbb{R}, \\ &\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad &\Rightarrow \qquad &\vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad &c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\vec{x}_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die allgemeine Lösung für das homogene Problem.

Siehe nächstes Blatt!

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-2t} + Be^t \\ Ce^{-2t} + De^t \end{pmatrix}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir diesen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_p(t) &= \begin{pmatrix} -2Ae^{-2t} + Be^t \\ -2Ce^{-2t} + De^t \end{pmatrix}, \\ A\,\vec{x}_p(t) + \vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} Ae^{-2t} + Be^t + Ce^{-2t} + De^t + e^{-2t} \\ 4Ae^{-2t} + 4Be^t - 2Ce^{-2t} - 2De^t - 2e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A + C + 1)e^{-2t} + (B + D)e^t \\ (4A - 2C)e^{-2t} + (4B - 2D - 2)e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle t. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\begin{aligned} 3A + C + 1 &= 0, & D &= 0, \\ 4A &= 0, & 4B - 3D - 2 &= 0, \end{aligned}$$

also $A = D = 0$, $C = -1$ und $B = \frac{1}{2}$. Somit ist

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung ist demnach durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

gegeben. Setzen wir die Anfangsbedingung ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + \frac{1}{2} \\ c_1 + 4c_2 - 1 \end{pmatrix},$$

also $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = 0$. Somit ist

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{2t} + e^t \\ -e^{2t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

die Lösung zur gegebenen Anfangsbedingung.

3. a) Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda)\left((2-\lambda)(1+\lambda) - 2\right) = (1+\lambda)(1-\lambda)\lambda \end{aligned}$$

Bitte wenden!

hat die Wurzlen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ folgt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und da alle Eigenwerte verschieden sind, ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

b) Da die zweite Gleichung von den ersten und dritten „entkoppelt“ ist, führt der Ansatz $\vec{y}_{p_1} = \begin{pmatrix} Ae^{2x} & 0 & Be^{2x} \end{pmatrix}^T$ auf eine partikuläre Lösung. Aus

$$\begin{pmatrix} 2Ae^{2x} \\ 0 \\ 2Be^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{2x} \\ 0 \\ Be^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2A - 2B + 1)e^{2x} \\ 0 \\ (A - B)e^{2x} \end{pmatrix}$$

finden wir durch Koeffizientenvergleich $A = \frac{3}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$.

Somit ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 0 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

c) Mit dem der Ansatz $\vec{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $0 = -C + 6$, also $\vec{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_2}(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 6 \\ c_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Die Inhomogenität ist gerade die Summe der beiden in den vorigen Teilaufgaben behandelten Inhomogenitäten. Daher ist die Summe $\vec{y}_{p_1} + \vec{y}_{p_2}$ eine partikuläre Lösung und für die allgemeine Lösung gilt

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 6 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

4. Sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A verschieden, so hat das AWP

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{7}$$

für jede Anfangsbedingung $\vec{x}_0$ die Lösung $\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$, wobei $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ die Eigenvektoren zu λ_1, λ_2 und c_1, c_2 von $\vec{x}_0$ abhängige Konstanten bezeichnen (vgl. Aufgabe 1). Sind beide Eigenwerte reell, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \left(c_i e^{\lambda_i t}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \lambda_i > 0 \text{ und } c_1 > 0, \\ -\infty, & \text{falls } \lambda_i > 0 \text{ und } c_1 < 0, \\ 0, & \text{falls } \lambda_i < 0 \text{ oder } c_i = 0, \\ c_i, & \text{falls } \lambda_i = 0, \end{cases}$$

für $i = 1, 2$. Sind also $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems und jede nichttriviale Lösung strebt für $t \to \infty$ entweder gegen den Ursprung oder unendlich weit von diesem weg.

a) Hier sind $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Jede nichttriviale Lösung „explodiert“ also sowohl in Richtung von $\pm\vec{v}_1$ als auch in Richtung von $\pm\vec{v}_2$ und strebt demnach für $t \to \infty$ ins Unendliche. Der Ursprung ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

b) Hier sind $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Jede nichttriviale Lösung strebt also zum Ursprung hin. Dieser ist somit ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

c) Hier ist $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$. Eine nichttriviale Lösung, die auf der durch $\vec{v}_1$ bestimmten Geraden verläuft, strebt also gegen den Ursprung. Jede andere nichttriviale Lösung nähert sich asymptotisch der durch $\vec{v}_2$ bestimmten Geraden.

Nichtreelle Eigenwerte treten stets in Paaren λ, $\bar{\lambda}$ von komplex-konjugierten Zahlen auf. Ist $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ ein Eigenvektor zu $\lambda = \gamma + i\omega$, so hat (7) die Lösung

$$\vec{x}(t) = e^{\gamma t}\left((c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t))\,\vec{u} + (-c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t))\,\vec{v}\right),$$

mit von $\vec{x}_0$ abhängigen Konstanten c_1, c_2 (vgl. Aufgabe 1). Der Imaginärteil der Eigenwerte führt also dazu, dass jede nichttriviale Lösung eine Spirale um den Ursprung beschreibt[1]. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems und jede nichttriviale Lösung strebt für $t \to \infty$ wegen

$$\lim_{t\to\infty} \left|e^{\gamma t + i\omega t}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{\gamma t} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \gamma < 0, \\ \infty, & \text{falls } \gamma > 0, \\ 1, & \text{falls } \gamma = 0 \end{cases}$$

entweder gegen den Ursprung oder unendlich weit von diesem weg, sofern sie nicht, im Fall $\gamma = 0$, periodisch mit der (minimalen) Periode $2\pi/|\omega|$ ist.

d) Hier ist $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, die nichttrivialen Lösungen „explodieren“ also wiederum in alle Richtungen. Die Rotationsbewegung verläuft im positiven Drehsinn (d.i. im Gegenuhrzeigersinn).

e) Hier ist $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, die nichttrivialen Lösungen streben also für $t \to \infty$ gegen den Ursprung. Die Rotationsbewegung verläuft im postiven Drehsinn.

5. **a)** Die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (1, -1)^T$ und $v_2 = (0, 1)^T$. Damit ist das gesuchte Bild I.

b) Hier sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$. Da der Realteil negativ ist, sind die Bahnen spiralförmig einwärts verlaufend und gegen den Uhrzeigersinn (beachte, dass für $\vec{x}(0) = (1, 0)^T$ gilt: $\dot{\vec{x}}(0) = (-3/2, 2)^T$). Das passende Bild ist IV.

c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (0, 1)^T$ und $v_2 = (1, -1)^T$. Dies entspricht Bild V.

---

[1] Die Spiralbewegung verläuft für $\omega > 0$ im Uhr- oder Gegenuhrzeigersinn abhängig von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.