

## Musterlösungen zu Serie 7

1. a) Man berechnet mit dem Gaußalgorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-2(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(I)+2(II)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Also muss  $(x, y) = (-1, 1)$  und somit schneiden sich die beiden Geraden in genau einem Punkt.

- b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-\frac{3}{2}(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Die untere Zeile gibt dann  $0 = 7$  also gibt es keine Lösung und somit schneiden sich die Geraden nicht, das heisst es handelt sich um zwei parallele Geraden, die echt verschieden sind.

- c)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(I)-\frac{3}{2}(I);(I)\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen  $y =: t \in \mathbb{R}$  und erhalten  $x = 1 - 2t$ , also  $(x, y) = (1 - 2t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Es handelt sich also um eine Schnittgerade, das heisst die beiden ursprünglichen Gleichungen definieren dieselbe Gerade.

2. a) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned} x + 5z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

das heisst, es gibt keine Lösung; es gibt keinen Punkt, der in allen drei Ebenen liegt.

- b) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0, \end{aligned}$$

das heisst, die Lösung ist der Punkt  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Die drei Ebenen schneiden sich im Ursprung.

**Bitte wenden!**

c) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned}x + 5z &= 0 \\y - z &= 0 \\0 &= 0,\end{aligned}$$

das heisst die Lösungsmenge besteht aus allen Punkten von der Form

$$(x, y, z) = (-5t, t, t),$$

wobei  $t$  beliebig. Die drei Ebenen schneiden sich also in einer Gerade.

3. Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned}x - 3z &= 1 \\y + 2z &= 1 \\(k^2 - 4)z &= k - 2.\end{aligned}$$

- a) Das System hat eine eindeutige Lösung falls  $k^2 - 4 \neq 0$ , das heisst falls  $k \neq \pm 2$ .
- b) Falls  $k = 2$  ist die letzte Gleichung  $0 = 0$ . Das heisst es gibt unendlich viele Lösungen.
- c) Falls  $k = -2$  ist die letzte Gleichung  $0 = 4$ . Das heisst es gibt keine Lösung.

4. a) Sei  $v$  die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Wasser und  $s$  die Geschwindigkeit des Wasserstroms. Dann beträgt die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Land  $v + s$  flussabwärts und  $v - s$  flussaufwärts. Verwenden Sie nun die Tatsache, dass (Strecke) = (Geschwindigkeit)(Zeit) um folgende Gleichungen zu erhalten

$$\begin{aligned}8 &= (v + s) \frac{1}{3} && \leftarrow \text{flussabwärts} \\8 &= (v - s) \frac{2}{3} && \leftarrow \text{flussaufwärts}\end{aligned}$$

Die Lösung ist  $v = 18$  und  $s = 6$ .

b) Im thermischen Gleichgewicht muss gelten, dass

$$T_1 = \frac{T_2 + 200 + 0 + 0}{4}, T_2 = \frac{T_1 + T_3 + 200 + 0}{4} \text{ und } T_3 = \frac{T_2 + 400 + 0 + 0}{4}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Das kann man auch als folgendes System schreiben

$$\begin{aligned} -4T_1 + T_2 &= -200 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 &= -200 \\ T_2 - 4T_3 &= -400. \end{aligned}$$

Das ergibt die Lösung  $(T_1, T_2, T_3) = (75, 100, 125)$ .

5. a)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(II)-2(I)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{(I)-(II)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & 8 & -8 \end{array} \right).$$

Wir setzen  $z =: t \in \mathbb{R}$  und erhalten somit  $y + 8t = -8$ ,  $x - 10t = 13$  also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t + 13 \\ -8t - 8 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

b)

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{(III)-(II)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{(I)-2(III);(II)-3(III)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{(I)-9(IV);(II)-11(IV);(III)+3(IV)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

und mit  $x_2 =: t \in \mathbb{R}$  folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Bitte wenden!**

- c) Nach  $x$  auflösen liefert  $x = 4 - 2y - 3z$ , somit sind 2 Variablen frei wählbar. Wir setzen  $y =: s \in \mathbb{R}$  und  $z =: t \in \mathbb{R}$  und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

- d) Summe der beiden Gleichungen liefert  $0 = 4$  was nicht lösbar ist. Somit ist die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems leer.

- e) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

und somit ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 \\ x_2 &= 4 + 3x_3 \\ x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Wir setzen  $x_3 =: t \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t + 4 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}.$$