Musterlösungen zu Serie 8

1. **a)** Gesucht sind Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = x + 3y - z = 0.$$

Die Lösungsmenge ist die Ebene bestehend aus den Punkten von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3r + t \\ r \\ t \end{pmatrix},$$

wobei r und t beliebige reelle Zahlen sind.

b) Gesucht ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 0, \end{aligned}$$

das sich reduzieren lässt auf

$$\begin{aligned} x_1 + 0.25x_4 &= 0 \\ x_2 - 1.5x_4 &= 0 \\ x_3 + 2.25x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung besteht aus Punkten von der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25t \\ 1.5t \\ -2.25t \\ t \end{pmatrix}$, wobei t eine beliebige reelle Zahl.

Bitte wenden!

2. **a)** Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander genau dann, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist, also muss

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}\overset{!}{=}0.$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}=1+2+3\lambda$$

also muss $3\lambda=-3$ und somit $\lambda=-1$.

b) Aus

$$\begin{aligned}2=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1\\1-\lambda\\2-\lambda\end{pmatrix}\right|^2&=(\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(2-\lambda)^2\\&=2\,(\lambda-1)^2+(\lambda-2)^2=3\lambda^2-8\lambda+6\end{aligned}$$

folgt $3\lambda^2-8\lambda+4$, also $\lambda=2$ oder $\lambda=\frac{2}{3}$.

c) Für den Zwischenwinkel $\varphi=\frac{\pi}{6}$ gilt

$$\begin{aligned}1+\sqrt{2}\,\lambda=\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}&=\cos\varphi\left|\begin{matrix}0\\1\\\sqrt{2}\end{matrix}\right|\cdot\left|\begin{matrix}1\\1\\\lambda\end{matrix}\right|\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\sqrt{2+\lambda^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2+\lambda^2},\end{aligned}$$

also $\lambda^2-8\sqrt{2}\,\lambda+14=0$ und damit $\lambda=\sqrt{2}$ oder $\lambda=7\sqrt{2}$.

d) Mit dem Gaussverfahren folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\3&-1&-1&-2\\4&-1&-2&-\lambda\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-4&-2\\0&3&-6&-\lambda\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-2&-1\\0&3&-6&-\lambda\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&3-\lambda\end{array}\right),$$

also muss $\lambda=3$ sein.

Die Schnittgerade wird dann z.B. durch

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\qquad\mu\in\mathbb{R},$$

parametrisiert.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Man berechnet

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}v_2w_3 - v_3w_2\\v_3w_1 - v_1w_3\\v_1w_2 - v_2w_1\end{pmatrix}$$
$$= u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1$$
$$= (u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2) - (u_1v_3w_2 + u_2v_1w_3 + u_3v_2w_1)\,,$$

was genau der Determinante der Matrix $\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\v_1 & v_2 & v_3\\w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix}$ enspricht.

b) Wir betrachten $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$ und verwenden a)

$$[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = \det\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\\u_1 & u_2 & u_3\\w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\v_1 & v_2 & v_3\\w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix} = -\,[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,,$$

wobei wir verwendet haben, dass die Determinante unter Zeilenvertauschen das Vorzeichen wechselt (hier genau um den Faktor (-1), da wir die 1. und 2. Zeile vertauscht haben). Also ist

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -\,[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$$

das Spatprodukt ändert also das Vorzeichen unter Permutation der einzelnen Vektoren, genau in derselben Art wie die Determinante.

c) Wir berechnen

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 3 - 6\cdot 1\\6\cdot 2 - 4\cdot 3\\4\cdot 1 - 2\cdot 2\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Das bedeutet die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig, was man auch direkt sieht, da $\vec{u} = 2\vec{v}$. Daher liefert das Kreuzprodukt den Nullvektor und nicht einen auf beide Vektoren orthogonal stehenden Vekor.

Wir berechnen

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-15\\9-4\\10-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix}$$

und man überprüft leicht, dass der Vektor $\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht (i.e. $\vec{v}\cdot\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix} = 0$ und $\vec{w}\cdot\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix} = 0$).

Bitte wenden!

Wir berechnen

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = u \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -52 + 10 + 42 = 0.$$

Was klar ist, da der Vektor $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{v}$ steht und insbesondere also auch zu $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$, daher muss das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ sein.

Dies hätte man auch aus der Eigenschaften der Determinante sehen können, da die Determinante 0 ist, wenn zwei Zeilen oder Spalten linear abhängig sind, hier $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

d) Wir berechnen

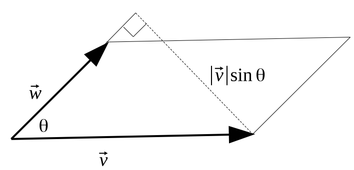
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = 0^2 + 0^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 \sin^2\theta$$

und da $|\vec{v}|^2 = 1$ und $|w|^2 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2$ folgt die Gleichung.

Bemerkung: Da $|\vec{v}|\sin\theta$ genau die Höhe des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms ist sieht man aus der Gleichung, dass $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\sin\theta\,|\vec{w}|$ gerade der Fläche dieses Parallelogramms enspricht.

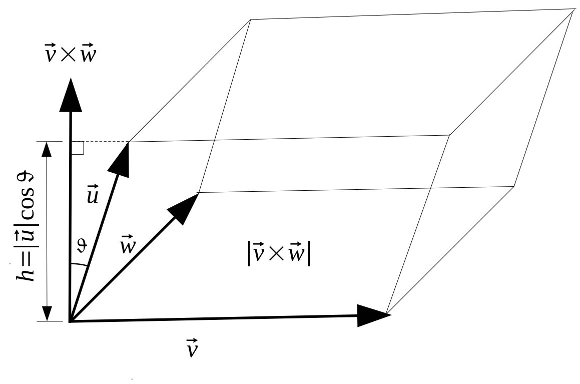


Insbesondere kann man aus d) und der Definition des Spatproduktes folgern, dass $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ genau dem Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds enspricht. Dieses berechnet sich aus Grundfläche mal Höhe, wobei $|\vec{v} \times \vec{w}|$ die Grundfläche ist. Aus der bekannten Gleichung $\vec{u} \cdot \vec{z} = |\vec{u}|\,|\vec{z}|\cos\vartheta$, wobei ϑ den Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{z}$ bezeichnet, folgt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}|\,|\vec{v} \times \vec{w}|\cos\vartheta$$

wobei $|u|\cos\vartheta$ genau der Höhe des Parallelepipeds enspricht. Die Gleichung aus a) liefert, dass auch der Betrag der Determinante $\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ dem Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds entspricht.

Siehe nächstes Blatt!



4. a) Es sind

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1 & 1+1\\ 0-1 & 0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+0 & 2+1\\ -1+0 & -1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

und daher $AB \neq BA$.

b) Es sind

$$(AB)C = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+6 & -1+2\\ -1+3 & 1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$
$$A(BC) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+3 & -2+1\\ -1+3 & 1+1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+2 & -1+2\\ 0+2 & 0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

also $(AB)C = A(BC)$.

c) Es sind

$$\det(A) = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$
$$\det(C) = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$
$$AC = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{und damit}$$
$$\det(AC) = \begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Insbesondere ist also $\det(A)\det(C) = \det(AC)$.

Bitte wenden!

d) Ist E eine $m_1 \times n_1$ Matrix, F eine $m_2 \times n_2$ Matrix, so ist das Produkt EF genau dann definiert, wenn $n_1 = m_2$. Daher sind die Produkte AD^T und DA definiert, nicht aber AD und $D^T A$. Es sind

$$AD^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3+1 & 0+1 \\ 0-1 & 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1-1 \\ 3+0 & 3+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. **a)** Es gelten

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq E_2,$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = E_2,$$

$$C^T C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \qquad \text{und}$$

$$D^T D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_4.$$

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 & \dots & \vec{s}_n \end{pmatrix}$ mit Spaltenvektoren $\vec{s}_1, \cdots, \vec{s}_n$. Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 & \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_n \\ \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1 & \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{s}_n \cdot \vec{s}_1 & \vec{s}_n \cdot \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_n \cdot \vec{s}_n \end{pmatrix},$$

also $E_n = A^T A$ genau dann, wenn $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$

c) Aus $1 = \det E_n = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2$ folgt $\det A = \pm 1$.

Siehe nächstes Blatt!

6. **a)** Entwicklung nach der 4. Zeile:

$$\det A = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{=28} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{=-43} = 2 \cdot 28 - 2 \cdot (-43) = 142.$$

b) Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\det B = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{=-27} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{=9} = 2 \cdot (-27) - 9 = -63.$$