D-ERDW, D-HEST, D-USYS — Mathematik I — HS 14

Dr. Ana Cannas

Serie 10:

Rang einer Matrix und Lösungsverhalten eines LGS

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 10 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 1./3. Dezember.

1. Was ist der Rang der Koeffizientenmatrizen von Serie 7? Bearbeiten Sie mindestens 6 Matrizen.

Bestätigen Sie für jedes *homogene* System der Serie 7 die Formel

$$\dim(\text{Lösungsmenge}) = (\text{Anzahl von Variablen}) - \text{Rang der Koeffizientenmatrix}.$$

2. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \\ -5+s \\ 5 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

b) Bestimmen Sie Rang und Determinante der Koeffizientenmatrix A.

c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$.

Bitte wenden!

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 2k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Parameter k, so dass

a) $\mathrm{Rang}(A) = 1.$

b) $\mathrm{Rang}(A) = 2.$

c) $\mathrm{Rang}(A) = 3.$

4. Die Inverse A^{-1} der 3×3-Matrix A ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

a) $\mathrm{Rang}(A)$.

b) die Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) die Determinante der Matrix $3A \left[\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^2$.

5. Wir betrachten

die Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad$ und den Vektor $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Für welche Werte von α ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$?

b) Bestimmen Sie den Parameter α, so dass das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{$*$}$$

keine eindeutige Lösung besitzt und beschreiben Sie, was dies geometrisch für die Spaltenvektoren der Matrix A bedeutet.

Siehe nächstes Blatt!

c) Bestimmen Sie mit dem von Ihnen in Teilaufgabe **b)** gefundenen Wert für α den Paramteter β, so dass das Gleihungssystem $(*)$ unendlich viele Lösungen besitzt und geben Sie die allgemeine Form derselben an.

6. Wir berücksichtigen eine Gleichung

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

wobei nach elementaren Zeilenumformungen die folgende erweiterte Matrix erreicht wird:

$$\left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & \vec{b} \end{array} \right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Können Sie mit dieser Information

a) die Lösung der Gleichung bestimmen?

Falls ja, geben Sie diese Lösung an. Falls nein, erklären Sie warum.

b) den Nullraum von A bestimmen?

Falls ja, geben Sie diesen an. Falls nein, erklären Sie warum.

c) den Spaltenraum von A bestimmen?

Falls ja, geben Sie diesen an. Falls nein, erklären Sie warum.

Bitte wenden!

Die Lösungen sind

1.

S7A1 **a)** $0 = 2 - 2.$

b) $1 = 2 - 1.$

c) wie **b)**.

S7A2 **a)** $1 = 3 - 2.$

b) $0 = 3 - 3.$

c) wie **a)**.

S7A3 **a)** $0 = 3 - 3.$

b) $1 = 3 - 2.$

S7A4 $0 = 3 - 3.$

S7A5 **a)** $1 = 3 - 2.$

b) $1 = 5 - 4.$

c) $2 = 3 - 1.$

d) $2 = 3 - 1.$

e) $1 = 4 - 3.$

2. **a)** $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3, 0, 1, -1, 0) + r(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0) + t(\frac{11}{4}, 0, -\frac{3}{2}, 2, 1),\ r, t \in \mathbb{R}.$

b) $\operatorname{rang} A = 3, \quad \det A = 0.$

c) $\dim(\{\text{Lsg von } A\vec{x} = \vec{0}\}) = 2;$
Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0\right) + t\left(\frac{11}{4}, 0, -\frac{3}{2}, 2, 1\right),\ r, t \in \mathbb{R}.$

3. **a)** $k = 0.$

b) $k = 1.$

c) $k \notin \{0, 1\}.$

4. **a)** $\operatorname{Rang}(A) = 3.$

b) $\vec{x} = (13, 4, 6).$

c) $\det = 54.$

5. **a)** $\alpha \neq -4.$

b) $\alpha = -4$, geom Int: Spaltenvektoren sind komplanar.

c) $\beta = 0$; Lösung $\vec{x} = (4, -1, 0) + t(-4, 1, 1),\ t \in \mathbb{R}.$

6. **a)** Ja; Lösung $\vec{x} = (0, 2, 4, 0) + t(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 1),\ t, s \in \mathbb{R}.$

b) Ja; Nullraum $\vec{x}_N = t(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 1),\ t, s \in \mathbb{R}.$

c) Nein.