D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 10:
Rang einer Matrix und Lösungsverhalten eines LGS

Einsendeschluss: 5. Dezember 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0.

√ (b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

Offensichtlich sind die drei Zeilen linear abhängig, das Gaussverfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Rang der Matrix 1.

2. Der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 1.

√ (b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

Das Gaussverfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist der Rang der Matrix 2.

3. Der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 2.

(b) 3.

√ (c) 4.

(d) 5.

Das Gaussverfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit is der Rang der Matrix 4.

4. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\operatorname{Rang}(A) = n$.

(b) Das Gauss-Verfahren auf die Matrix A angewendet erreicht eine Stufenform mit n umkreisten Elementen.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

✓ (d) Der Nullraum von A ist $\mathbb{R}^n$.

Das folgt aus der Theorie aus der Vorlesung:
Da es genau n Variablen/Spalten gibt, bedeuten die Aussagen (a),(b) und (c), dass der Nullraum von A trivial ist, d.h. $\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

5. Sei A eine *quadratische* $n \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\det A \neq 0$.

(b) Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

✓ (c) $\operatorname{Rang} A \neq 0$.

(d) Der Nullraum von A ist $\left\{\vec{0}\right\}$.

Das folgt aus der Theorie aus der Vorlesung:
Für eine *quadratische* Matrix A bedeutet jede Aussage (a),(b) und (d), dass A invertierbar ist. Der Rang einer $n \times n$ invertierbaren Matrix ist genau n (und nicht eine beliebige positive Zahl).

6. Sei A eine *quadratische* $n \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\det A = 0$.

(b) $\operatorname{Rang} A \neq n$.

(c) Das System $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt unendlich viele Lösungen.

✓ (d) Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt unendlich viele Lösungen für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Das folgt aus der Theorie aus der Vorlesung:
Für eine *quadratische* Matrix A bedeutet jede Aussage (a),(b) und (c), dass A *nicht* invertierbar ist. Un wenn A nicht invertierbar ist, gibt es Vektoren $\vec{b}$, für welche das System $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar ist.

7. Für $m \times n$ Matrizen A mit $m < n$ gilt stets

√ (a) $\operatorname{Rang} A \leq m$.

(b) $m \leq \operatorname{Rang} A \leq n$.

(c) $\operatorname{Rang} A = m$ oder $\operatorname{Rang} A = n$.

(d) $\operatorname{Rang} A \geq n$.

Eine $m \times n$ Matrix hat m Zeilen und n Spalten. A priori ist nicht klar, ob alle m Zeilen linear unabhängig sind. Das Gaussverfahren liefert dann den Rang der Matrix und der kann höchstens m sein, falls alle Zeilen linear unabhängig sind, und strikte kleiner m falls es linear abhängige Zeilen gibt.

8. Gegeben sei ein homogenes System mit 5 Gleichungen und 4 Variablen, wobei die Koeffizientenmatrix Rang 2 hat. Dann ist die Lösungsmenge

(a) leer

(b) ein Punkt

(c) eine Gerade

√ (d) eine Ebene

Die Lösung des homogenen Systems enspricht genau des Nullraums der Koeffizientenmatrix. Wir wissen aus der Vorlesung, dass für eine Matrix M,

$$\dim \mathcal{N}(M) = n - \operatorname{Rang} M = 4 - 2 = 2.$$

Das heisst die Lösungsmenge ist 2 dimensional, wird also durch eine Ebene beschrieben. Bemerken Sie, dass obwohl 5 Gleichungen gegeben sind, wir nur 4 Variablen haben, das heisst $n = 4$.

9. Sei A eine 4×3 Matrix mit Rang 2. Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$

(a) leer.

(b) ein Punkt.

√ (c) eine Gerade.

(d) eine Ebene.

Die Matrix hat 4 Zeilen und 3 Spalten. Das bedeutet es gibt 4 Bedingungen an 3 Variablen. Dass der Rang der Matrix 2 ist, bedeutet dass nur 2 Bedingungen linear unabhängig sind. Daher gibt es 1 freien Parameter, respektive die Formel für die Dimension des Lösungsraumes, dim (Lösungsmenge) = (Anzahl von Variablen) − Rang der Koeffizientenmatrix, liefert $1 = 3 - 2$ und somit ist der Lösungsraum 1-dimensional, also eine Gerade.

10. Sei A eine 3×4 Matrix mit Rang 2. Was ist die Dimension der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$?

(a) 0.

(b) 1.

$\surd$ (c) 2.

(d) 3.

Da die Matrix eine 3×4 Matrix ist, hat sie 3 Zeilen und 4 Spalten, also ist $A\vec{x} = \vec{0}$ ein LGS in 4 Variablen. Die Gleichung für die Dimension der Lösungsmenge dim (Lösungsmenge) = (Anzahl von Variablen)−Rang der Koeffizientenmatrix, liefert $2 = 4 - 2$.