Serie 11: Eigenwerte

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 11 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 8./10. Dezember.

1. Für folgende Matrizen finden Sie alle reellen Eigenwerte und bestimmen Sie dann eine Basis für alle Eigenräume. Des Weiteren, bestimmen Sie eine Eigenbasis, falls es eine gibt.

a) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **n)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **o)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Wir betrachten die vom Parameter a abhängigen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a) Für welche(n) Wert(e) von a ist die Matrix A regulär (d.h. invertierbar)?

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass -2 ein Eigenwert von A ist und geben Sie dann auch die übrigen Eigenwerte von A an.

c) Bestimmen Sie a so, dass $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\end{pmatrix}^T$ ein Eigenvektor von A ist.

3. Betrachten Sie folgendes Modell, das die Interaktion der Population von Füchsen und Hasen **rekursiv** beschreibt:

$$\begin{aligned} h(t+1) &= 4h(t) - 2f(t) \\ f(t+1) &= h(t) + f(t), \end{aligned}$$

wobei h die Population der Hasen und f die Population der Füchse darstellt.
Finden Sie explizite Formeln für $h(t)$ und $f(t)$ für folgende Anfangswerte.

a) $h(0) = f(0) = 100.$

b) $h(0) = 200,\ f(0) = 100.$

c) $h(0) = 600,\ f(0) = 500.$

4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte - reell oder komplex. Ermitteln Sie dann eine Basis jedes Eigenraumes und bestimmen Sie falls möglich eine Eigenbasis.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. **a)** Sind die folgenden Matrizen invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 3-i & 4 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1+2i & 2-i & 0 \\ -i & 2 & 3+4i \end{pmatrix}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Determinante.

b) Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Für Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ seien die Matrizen R_α und S_α durch

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen R_α und S_α in Abhängigkeit des Winkels α.

7. Zusatzaufgabe:

Die folgende „Kaninchenaufgabe“ geht auf Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, zurück. Die Zahlen F_n, $n \in \mathbb{N}$, sind die berühmten *Fibonacci-Zahlen*.

Angenommen, neugeborene Kaninchenpaare werden nach einem Monat geschlechtsreif und bringen danach jeden Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt. Anfänglich existiere ein neugeborenes Paar. Wieviele Kaninchenpaare F_n gibt es nach einer vorgegebenen Anzahl n von Monaten?

a) Berechnen Sie die Anzahl neugeborener Kaninchenpaare für die ersten paar Monate und finden Sie eine allgemeine *Rekursionsformel*, d.h. eine Formel, mit der sich die Zahl F_n aus den schon bekannten Zahlen $F_0, \ldots, F_{n-1}$ berechnen lässt.

b) Setzen Sie $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\vec{x}_{n+1} = A\,\vec{x}_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{$\star$}$$

mit einer Matrix A.

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.

c) Wegen ($\star$) gilt $\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Bestimmen Sie damit die Zahl in F_n in *geschlossener Form*, d.h. finden Sie eine Formel für F_n, die die Zahlen $F_0, \ldots, F_{n-1}$ nicht enthält.

Bitte wenden!

Die Lösungen sind

1. **a)** <u>Eigenwerte:</u> $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = 9$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) <u>Eigenwerte:</u> $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) <u>Eigenwerte:</u> $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; keine Eigenbasis.

e) keine reellwertigen Eigenwerte.

f) $\lambda_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{57}}{2}$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_2 - 2 \end{pmatrix} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2.27 \end{pmatrix} \right\}$

g) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$, <u>Eigenbasis:</u> $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

h) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$, <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

i) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$, <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

j) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$; $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_2 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; keine Eigenbasis.

k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

l) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; keine Eigenbasis.

m) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

n) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; <u>Eigenbasis:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

o) $\lambda_1 = 0$; $\mathcal{E}_0 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** $a \neq 4$.

b) $a = -6$; $\lambda_2 = -5$ und $\lambda_3 = 1$.

c) $a = 4$.

3. **a)** $h(t) = f(t) = 100 \cdot 2^t$.

b) $h(t) = 200 \cdot 3^t, \quad f(t) = 100 \cdot 3^t$.

c) $h(t) = 400 \cdot 2^t + 200 \cdot 3^t; \quad f(t) = 400 \cdot 2^t + 100 \cdot 3^t$.

4. **a)** $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 1$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$; Eigenbasis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

d) $\lambda_{1;2} = 0,\ \lambda_{3,4} = 1$; $\mathcal{E}_0 = \operatorname{span}\{e_1, e_3\}$, $\mathcal{E}_1 = \operatorname{span}\{e_2\}$; keine Eigenbasis.

5. **a)** $\det A = 6i$, A ist invertierbar; $\det B = 0$, B nicht invertierbar.

b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$.

6. $\underline{R_\alpha}$:

- doppelter Eigenwert 1 für $\alpha = 0$, jeder Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist Eigenvektor,
- doppelter Eigenwert -1 für $\alpha = \pi$, jeder Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist Eigenvektor, und
- sonst das konjugierte Paar $e^{\pm i\alpha}$ komplexer Eigenwerte mit Eigenvektoren $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\underline{S_\alpha}$:

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ mit $\mu \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ bzw. $\mu \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. **a)** $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\lambda_1 = g,\ \lambda_2 = 1 - g$, wobei $g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mit $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix}$ bzw. $\mu \begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

c) $F_n = \frac{g^{n+1} - (1-g)^{n+1}}{\sqrt{5}}$, mit g wie oben.