MC-Serie 11: Eigenwerte

Einsendeschluss: 12. Dezember 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ sind offenbar nicht kollinear.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ sind offenbar nicht kollinear.

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind offenbar nicht kollinear.

√ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Offenbar ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

2. Welche der folgenden Aussagen ist **korrekt**?

(a) Jede reelle 2×2-Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte.

Falsch, z.B. besitzt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den doppelten EW 1.

(b) Jede reelle 2×2-Matrix hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

Falsch, z.B. besitzt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nur die EV $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Besitzt eine reelle 2×2-Matrix nur einen Eigenwert, so sind alle ihre Eigenvektoren kolinear (d.h. linear abhängig).

Falsch, z.B. besitzt die Einheitsmatrix E_2 den einzigen EW 1

√ (d) Besitzt eine reelle 2×2-Matrix nur einen Eigenwert, so ist dieser Eigenwert reell.

Komplexe Eigenwerte treten als Paare auf, denn mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert, und $\lambda = \overline{\lambda}$ genau dann, wenn λ reell ist.

3. Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat 0 als Eigenwert?

√ (a) A.

(b) B.

(c) C.

(d) Keine. 0 kann *per definitionem* kein Eigenwert sein.

Die Determinanten von B und C sind nicht 0, $\det B = 6$ und $\det C = 1$ also können diese beiden Matrizen nicht 0 als Eigenwert haben. Jedoch ist $\det A = 0$ also muss 0 ein Eigenwert von A sein.

4. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Die Eigenwerte einer invertierbaren Diagonalmatrix sind alle $\neq 0$.

Richtig. Die Diagonaleinträge sind hier gerade die Eigenwerte. Wenn 0 ein EW ist, ist das Produkt der Diagonaleinträge also gleich Null. Dieses Produkt ist hier aber gleich der Determinanten der Matrix, die nach Voraussetzung von 0 verschieden ist.

(b) Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix ist auch ein Eigenvektor der Inversen Matrix.

Richtig. Multipliziert man beide Seiten von $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ von links mit A^{-1}, so ergibt sich

$$\vec{x} = A^{-1}\left(A\vec{x}\right) = A^{-1}\lambda\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x},$$

also $A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\,\vec{x}$. Ist also $\vec{x}$ ein EV der Matrix A zum EW λ, so ist $\vec{x}$ auch ein EV der inversen Matrix A^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$.

(c) Jede Matrix mit negativer Determinante hat mindestens einen negativen Eigenwert.

Richtig, die Determinante einer Matrix ist das Produkt ihrer Eigenwerte. Ein Produkt kann nur dann negativ sein, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren negativ ist.

$\surd$ (d) Jede quadratische Matrix mit reellen Koeffizienten hat reelle Eigenwerte.

Falsch, z.B. hat $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1$, welches keine reellen Nullstellen besitzt.

5. Welche Aussage über eine *reelle* quadratische Matrix ist **falsch**?

(a) Die komplexen Eigenwerte treten immer als Paare komplex konjugierter Zahlen auf.

Ist λ ein Eigenwert einer reellen Matrix A zum Eigenvektor $\vec{v}$ dann gilt insbesondere $\overline{\lambda\vec{v}} = \overline{\lambda}\overline{\vec{v}} = \overline{A\vec{v}} = A\overline{\vec{v}}$ und somit ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$.

(b) Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind stets reell.

Für eine Dreiecksmatrix gilt, dass die Eigenwerte genau den Diagonaleinträgen entsprechen und diese sind, da es sich um eine reelle Matrix handelt, ebenfalls reell.

√ (c) Eine 4×4 Matrix besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

Nehmen wir zum Beispiel die Blockdiagonal-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann hat diese Matrix dieselben Eigenwerte, wie ihre beiden Blöcke, also die Eigenwerte $\pm i$.

(d) Eine 5×5 Matrix besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

Das charakteristische Polynom einer 5×5 Matrix ist eine Polynom 5ten Grades. Da komplexe Eigenwerte in Paaren kommen, können diese nur in gerader Zahl auftreten. Es muss also mindestens ein Eigenwert rein reellwertig sein.

6. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist

(a) diagonalisierbar und invertierbar.

√ (b) diagonalisierbar aber nicht invertierbar.

(c) nicht diagonalisierbar aber invertierbar.

(d) nicht diagonalisierbar und nicht invertierbar.

Auf der Diagonalen einer Dreiecksmatrix stehen bereits die Eigenwerte. In diesem Fall sind diese alle verschieden und somit gibt es 4 linear unabhängige Eigenvektoren, einen zu jedem Eigenwert. Also gibt es eine Eigenbasis und somit ist die Matrix diagonalisierbar. Jedoch ist die Determinante der Matrix 0, da auf der Diagonalen eine 0 steht und somit ist die Matrix nicht invertierbar.

7. Welche der folgenden Aussagen ist **korrekt**?

(a) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.

(b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

$\checkmark$ (c) Die Eigenwerte einer invertierbaren Matrix sind alle nicht Null.

(d) Die Eigenwerte einer diagonalisierbaren Matrix sind alle nicht Null.

Eine Matrix ist invertierbar, wenn sie Determinante $\neq 0$ hat. Besitzt jedoch eine Matrix den Eigenwert 0, dann muss ihre Determinante $= 0$ und somit die Matrix singulär sein.

8. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) A hat Eigenwerte $3 \pm 4i$.

$\checkmark$ (b) A hat Eigenwerte $-3 \pm 4i$.

(c) A hat Eigenwerte $4 \pm 3i$.

(d) A hat Eigenwerte $-4 \pm 3i$.

Das charakteristische Polynom von A ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 25$. Das gibt die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} = -3 \pm 4i.$$

9. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des Eigenraumes $\mathcal{E}_2$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des Eigenraumes $\mathcal{E}_2$.

$\checkmark$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Eigenbasis für A.

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist keine Eigenbasis für A.

Offenbar ist 2 ein Eigenwert von A, denn das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2$. Der Nullraum von $(A - 2E_2)$ hat Rang 1, das heisst es gibt nur einen Eigenvektor zur $\lambda = 2$, also keine Eigenbasis. Man sieht leicht, das $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu $\lambda = 2$ ist und somit eine Basis von $\mathcal{E}_2$ bildet.

10. Für welche Matrix ist die Summe der Eigenwerte gleich 16?

√ (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Summe aller Eigenwerte genau der Spur der Matrix entspricht. Diese wiederum ist genau die Summe der Diagonaleinträge. Man berechnet Spur $A = 1+3+5+7 = 16$, Spur $B = 1+6+11+16 = 34$, Spur $C = 2+2+2+2 = 8$ und Spur $D = 2+0+3+10 = 15$.