D-ERDW, D-HEST, D-USYS — Mathematik I — HS 14

Dr. Ana Cannas

Serie 12: Systeme linearer DGL 1. Ordnung

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 12 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 15./17. Dezember.

1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $\begin{array}{ll} \dot{x} = x + 12y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 3x + y, & y(0) = 1. \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \dot{x} = y & x(0) = 1, \\ \dot{y} = -x & y(0) = 3. \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \dot{x} = 3x - 4y, & x(0) = 4, \\ \dot{y} = x - y, & y(0) = 1. \end{array}$

2. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung des in der Vorlesung angegebenen Ansatzes für die jeweilige Inhomogenität.

a) $\begin{array}{ll} \dot{x} = 3x + 2y + 10\cos t, & x(0) = -4, \\ \dot{y} = -2x - 2y, & y(0) = 3. \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \dot{x} = x + y + e^{-2t}, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 4x - 2y - 2e^{t}, & y(0) = -\frac{3}{2}. \end{array}$

3. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2\,y_1 - 2\,y_3 + g(x), \\ y_2' &= -y_2 + h(x), \\ y_3' &= y_1 - y_3, \end{aligned}$$

für folgende „Störfunktionen“:

a) $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$

b) $g(x) = e^{2x}$ und $h(x) = 0$

c) $g(x) = 0$ und $h(x) = 6$

d) $g(x) = e^{2x}$ und $h(x) = 6$

Bitte wenden!

4. Unten sind einige Matrizen A, deren Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren angegeben. Beschreiben Sie jeweils in Worten, wie sich die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$ für $t \to \infty$ verhalten.

	A	λ_1	λ_2	v_1	v_2
a)	$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	3	6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
b)	$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	-3	-6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
c)	$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	-3	6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
d)	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & -20 \\ 50 & -7 \end{pmatrix}$	$1+10i$	$1-10i$	$\begin{pmatrix} 1+3i \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$
e)	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -20 \\ 50 & -13 \end{pmatrix}$	$-1+10i$	$-1-10i$	$\begin{pmatrix} 1+3i \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$

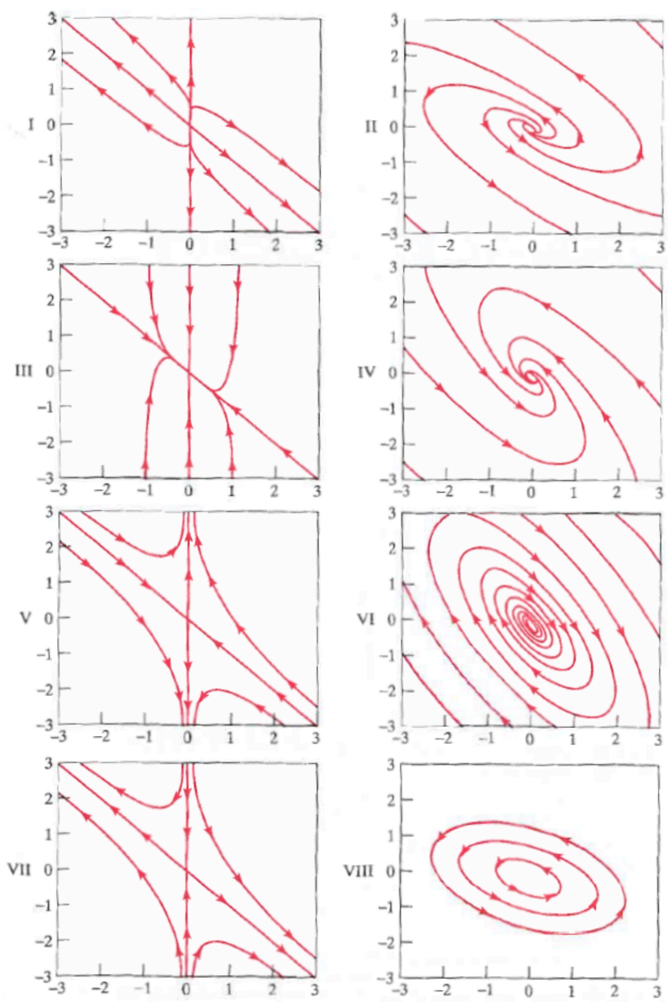
Siehe nächstes Blatt!

5. Finden Sie für jedes der folgenden dynamischen Systeme das entsprechende Phasenporträt.

a) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2.5 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x}$

b) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x}$

c) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$



Bitte wenden!

Die Lösungen sind

1. **a)** $\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\, e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\, e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 3 \sin t \\ -\sin t + 3 \cos t \end{pmatrix}.$

c) $\vec{x}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 4 + 4t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}.$

2. **a)** $\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \cos t + \sin t \\ 6 \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}.$

b) $\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{2t} + e^{t} \\ -e^{2t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}.$

3. **a)** $\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

b) $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 0 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

c) $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 6 \\ c_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

d) $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 6 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

4. **a)** Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$; 0 ist instabiler Gleichgewichtspunkt.

b) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$; 0 ist stabiler Gleichgewichtspunkt.

c) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, gilt für $t \to +\infty$

$$\vec{x}(t) \to \begin{cases} 0, & \text{wenn die Lsg entlang des zum negativen Eigenwert gehörenden Eigenvektors verläuft} \\ +\infty, & \text{wenn die Lsg entlang des zum positiven Eigenwert gehörenden Eigenvektors verläuft.} \end{cases}$$

d) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$.

e) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$.

5. **a)** Bild I.

b) Bild IV.

c) Bild V.