D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 12: Systeme linearer DGL 1. Ordnung

Einsendeschluss: 19. Dezember 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0 und 4 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = e^{c_1 t} + 2e^{4c_2 t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 t + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

√ (d) $x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Mit $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ist auch $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 4. Die allgemeine Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$ ist daher von der Form

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{0t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}.$$

Also ist die letzte Antwort richtig.

2. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

(a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

√ (b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich 1.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

Die Matrix $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte -4 und 3 zu Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann ist die Lösung von der Form $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{-4t} + 2k_2 e^{3t} \\ 7k_2 e^{3t} \end{pmatrix}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Mit $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt, dass $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$. Daher ist $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ 0 \end{pmatrix}$ und strebt für $t \to +\infty$ gegen $\vec{0}$ und somit ist die zweite Antwort korrekt.

3. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Koeffizientmatrix A dieses AWP gleich $3 \pm 30i$ sind. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{x}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

√ (a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\vec{x}(t) = k_1 e^{3t} \left(\cos(3t)v_1 + \sin(3t)v_2\right) + k_2 e^{3t} \left(\cos(3t)v_1 - \sin(3t)v_2\right),$$

wobei v_1, v_2 die Eigenvektoren zu $3 \pm 30i$ sind. Da $\cos(3t)$ und $\sin(3t)$ beschränkt sind, gilt

$$|\vec{x}(t)| \to \infty \text{ für } t \to \infty.$$

Somit ist die erste Antwort korrekt.

4. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t), \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t), \end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $2x(1) + y(1) = e^{-4}$.

(b) $x(1) + 2y(1) = e^{-4}$.

√ (c) $2x(1) + y(1) = 2e^{3}$.

(d) $x(1) + 2y(1) = 2e^{3}$.

Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} + \dot{y} &=& 4x \\ \dot{x} - \dot{y} &=& 6x \end{array} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{rcl} 2\dot{x} &=& 4x + 6y \\ 2\dot{y} &=& 4x - 6y \end{array} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& 2x + 3y \\ \dot{y} &=& 2x - 3y \end{array} \;\Leftrightarrow\; \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

mit $\vec{x} = (x, y)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)\,(\lambda - 3)\,,$$

die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$. Aus

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; b = -2a, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; c = 3d,$$

erhalten wir die zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} x(0) &= 1 = C_1 + 3C_2, \\ y(0) &= 0 = -2C_1 + C_2, \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad C_1 = \frac{1}{7} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{2}{7}$$

und somit

$$x\,(t) = \frac{1}{7} e^{-4t} + \frac{6}{7} e^{3t} \qquad \text{und} \qquad y\,(t) = -\frac{2}{7} e^{-4t} + \frac{2}{7} e^{3t}.$$

Also ist nur die dritte Antwort richtig.

5. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y\\ \dot{y} &= 4x + 3y + t.\end{aligned}$$

Welcher der folgenden Ansätze für eine partikuläre Lösung dieses Systems ist geeignet?

(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 t \\ k_2 t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ k_1 + k_2 t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

√ (d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ k_3 + k_4 t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$

Dafür verwenden wir die Tabelle mit Ansätzen für partikuläre Lösungen von Systemen von DGL 1. Ordnung.

Die Störfunktionen des Systems sind $g_1(t) = 0$ und $g_2(t) = t$ und enthalten somit ein Polynom 1. Grades. Wir berechnen das charakteristische Polynom des Systems

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Dann ist 0 keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung und somit nehmen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung $f(t) = A_0 + A_1 t,\ A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ und schliesslich $x_{\text{part}}(t) = k_1 + k_2 t,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ und $y_{\text{part}}(t) = k_3 + k_4 t,\ k_3, k_4 \in \mathbb{R}$.

6. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \cos t \\ \dot{y} &= x. \end{aligned}$$

Welcher der folgenden Ansätze für eine partikuläre Lösung dieses Systems ist geeignet?

(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos t \\ k_2 \cos t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos t + k_2 \sin t \\ k_3 \cos t + k_4 \sin t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$

(c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 t \cos t + k_2 t \sin t \\ k_3 t \cos t + k_4 t \sin t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$

√ (d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2 t) \cos t + (k_3 + k_4 t) \sin t \\ (k_5 + k_6 t) \cos t + (k_7 + k_8 t) \sin t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, \cdots, k_8 \in \mathbb{R}.$

Dafür verwenden wir die Tabelle mit Ansätzen für partikuläre Lösungen von Systemen von DGL 1. Ordnung.

Die Störfunktionen des Systems sind $g_1(t) = \cos t$ und $g_2(t) = 0$ und enthalten somit ein Kosinus-Term.

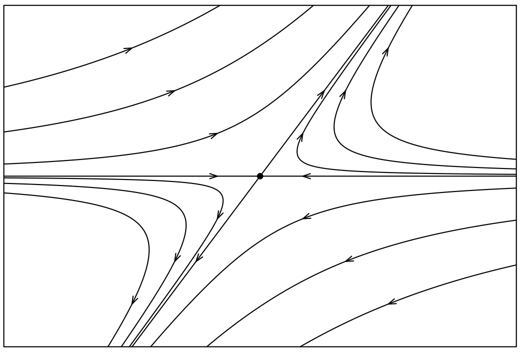
Wir berechnen das charakteristische Polynom des Systems

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

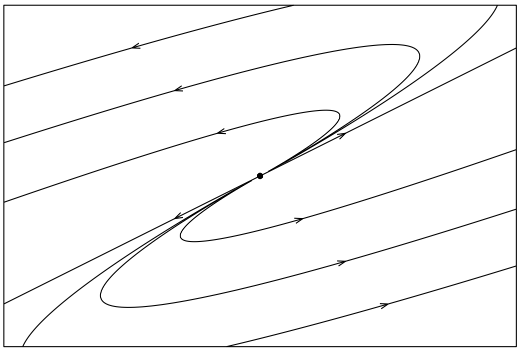
Dann ist i eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung und somit nehmen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung $f(t) = (A_1 + A_2 t) \cos t + (A_3 + A_4 t) \sin t,\ A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}$ und schliesslich $x_{\text{part}}(t) = (k_1 + k_2 t) \cos t + (k_3 + k_4 t) \sin t,\ k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ und $y_{\text{part}}(t) = (k_5 + k_6 t) \cos t + (k_7 + k_8 t) \sin t,\ k_5, k_6, k_7, k_8 \in \mathbb{R}$.

7. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

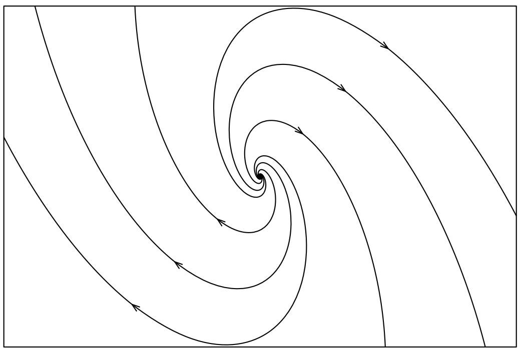
(a)



(b)



√ (c)



(d) in keinem Fall.

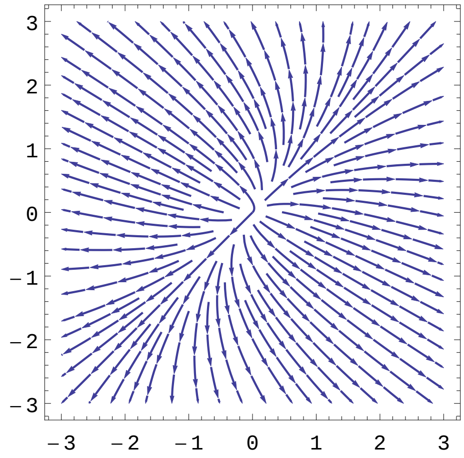
Die Bahnkurven der Abbildung in c) weisen spiralförmigen Charakter auf. Diese entsprechen genau Lösungen, deren Komponenten Linearkombinationen folgender Funktionen sind

$$e^{at}\cos(bt) \text{ und } e^{at}\sin(bt),\ a, b \neq 0.$$

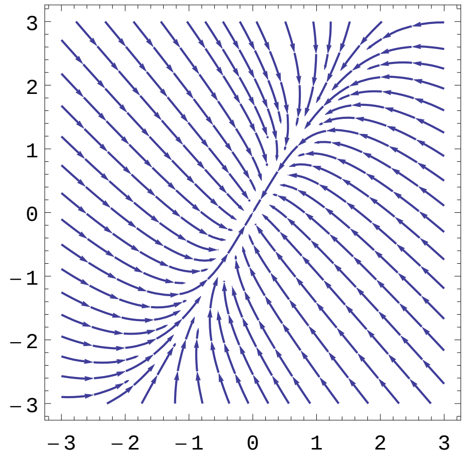
8. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

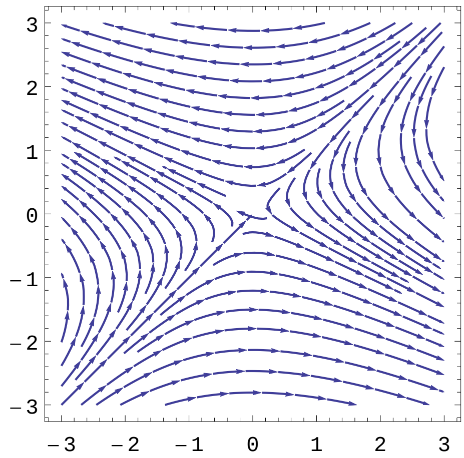
(a)



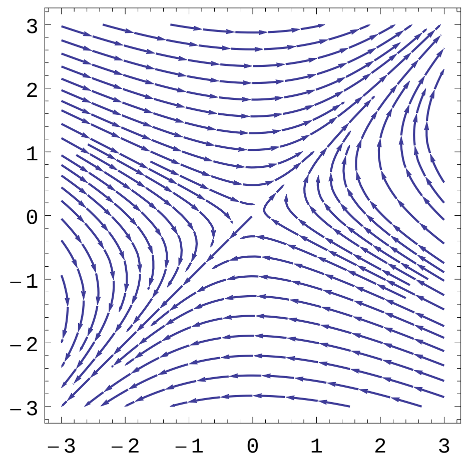
(b)



√ (c)



(d)

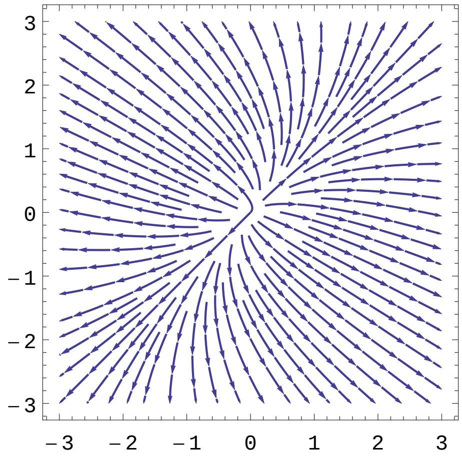


Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

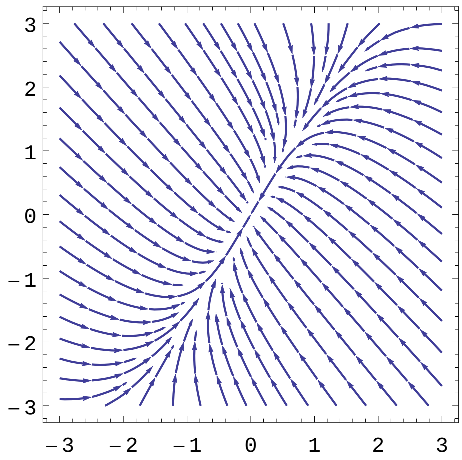
9. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \; ?$$

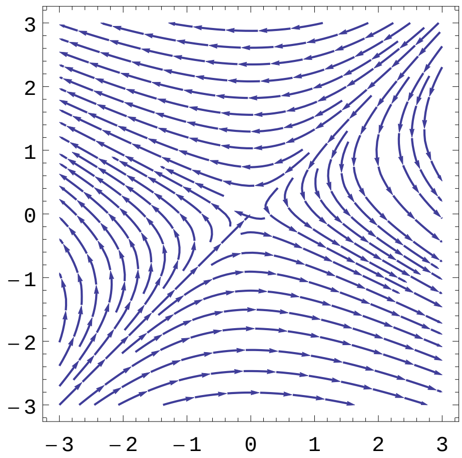
√ (a)



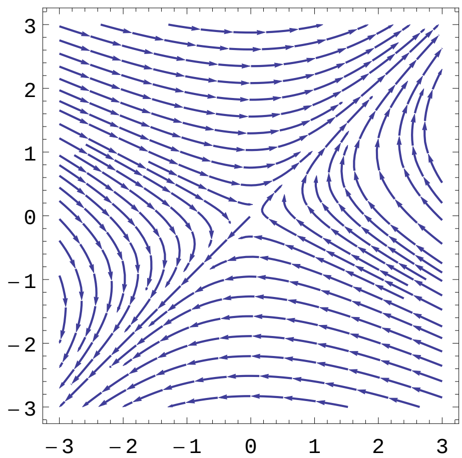
(b)



(c)



(d)

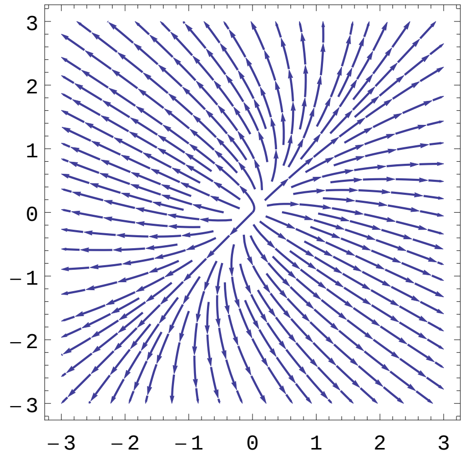


Die Matrix $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

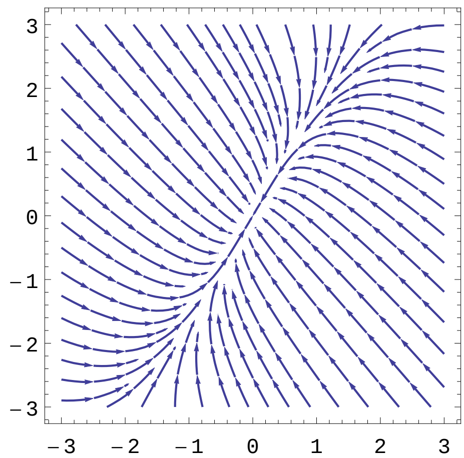
10. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \;?$$

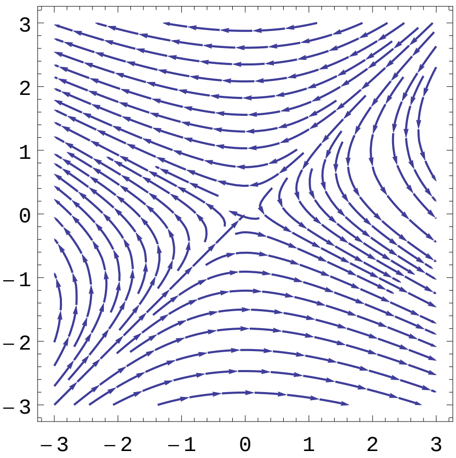
(a)



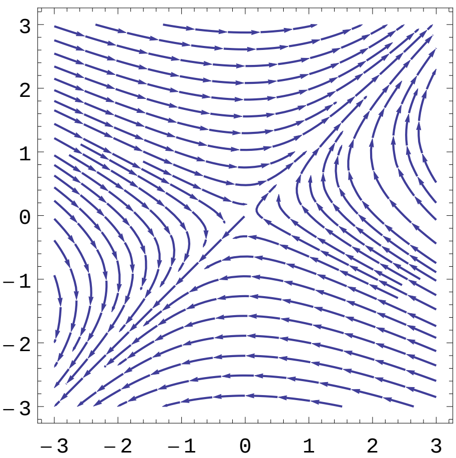
(b)



(c)



√ (d)



Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = 3$ zu Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.