D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 12: Systeme linearer DGL 1. Ordnung

Einsendeschluss: 19. Dezember 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0 und 4 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = e^{c_1 t} + 2e^{4c_2 t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 t + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

(a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich 1.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

3. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Koeffizientmatrix A dieses AWP gleich $3 \pm 30i$ sind. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{x}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

(a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

4. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t), \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t), \end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $2x(1) + y(1) = e^{-4}$.

(b) $x(1) + 2y(1) = e^{-4}$.

(c) $2x(1) + y(1) = 2e^{3}$.

(d) $x(1) + 2y(1) = 2e^{3}$.

5. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= 4x + 3y + t. \end{aligned}$$

Welcher der folgenden Ansätze für eine partikuläre Lösung dieses Systems ist geeignet?

(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 t \\ k_2 t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ k_1 + k_2 t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

(d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ k_3 + k_4 t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$

6. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \cos t \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

Welcher der folgenden Ansätze für eine partikuläre Lösung dieses Systems ist geeignet?

(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos t \\ k_2 \cos t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

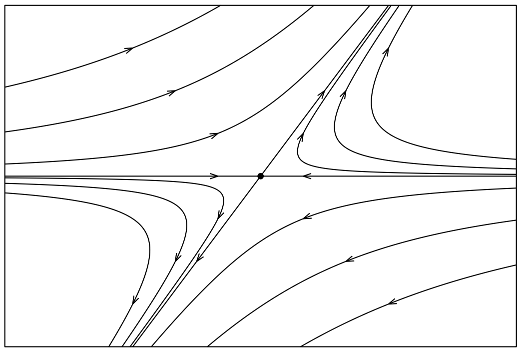
(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos t + k_2 \sin t \\ k_3 \cos t + k_4 \sin t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$

(c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 t \cos t + k_2 t \sin t \\ k_3 t \cos t + k_4 t \sin t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$

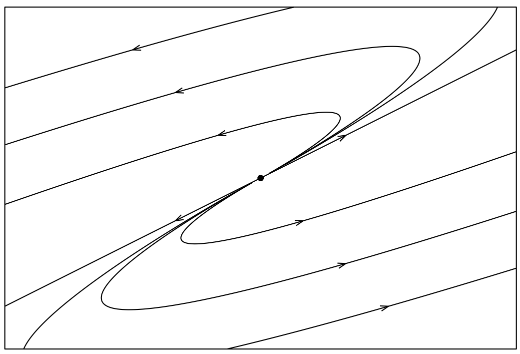
(d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2 t) \cos t + (k_3 + k_4 t) \sin t \\ (k_5 + k_6 t) \cos t + (k_7 + k_8 t) \sin t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, \cdots, k_8 \in \mathbb{R}.$

7. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

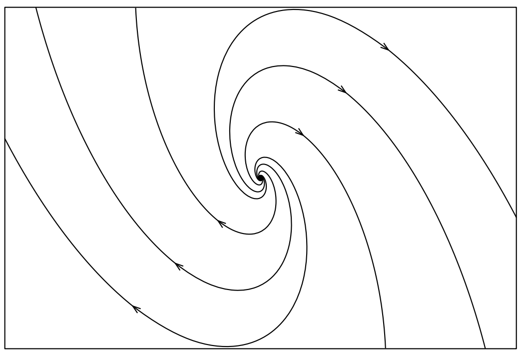
(a)



(b)



(c)

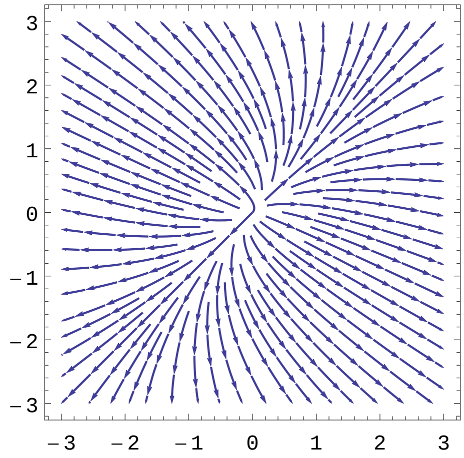


(d) in keinem Fall.

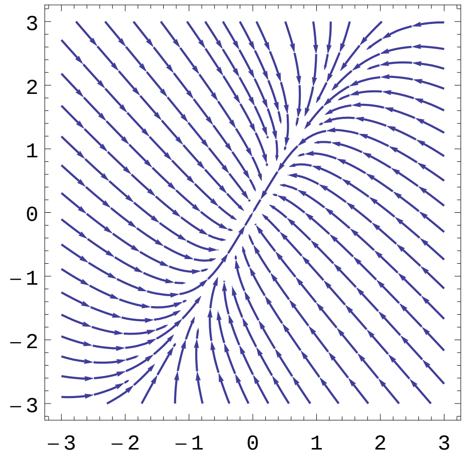
8. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\ ?$$

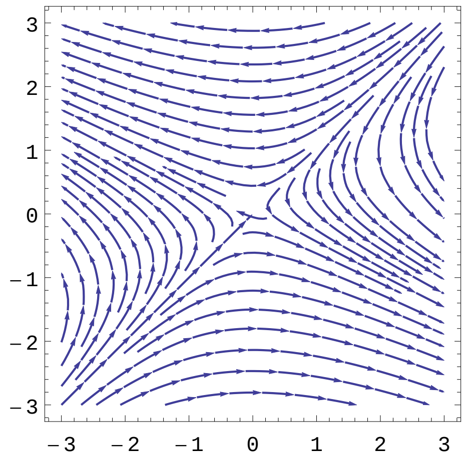
(a)



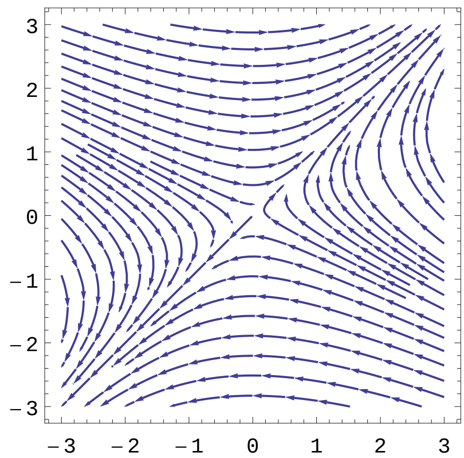
(b)



(c)



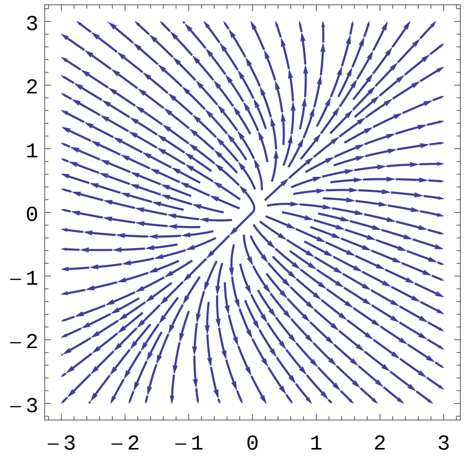
(d)



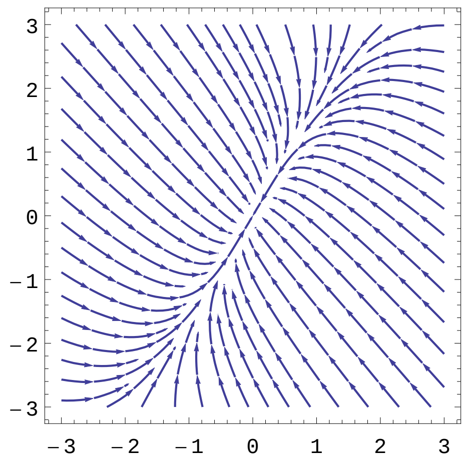
9. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

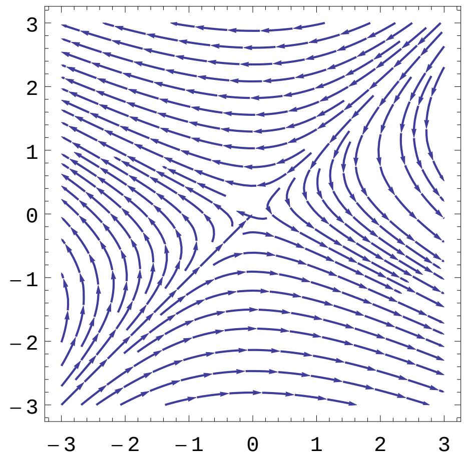
(a)



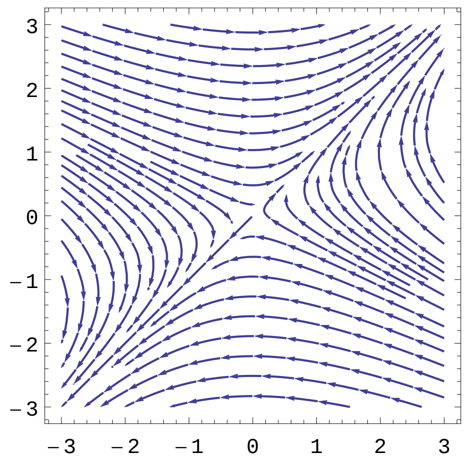
(b)



(c)



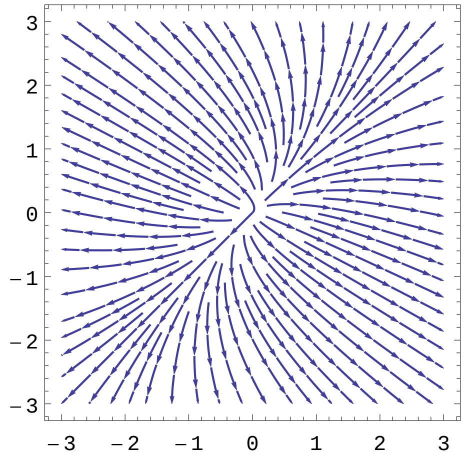
(d)



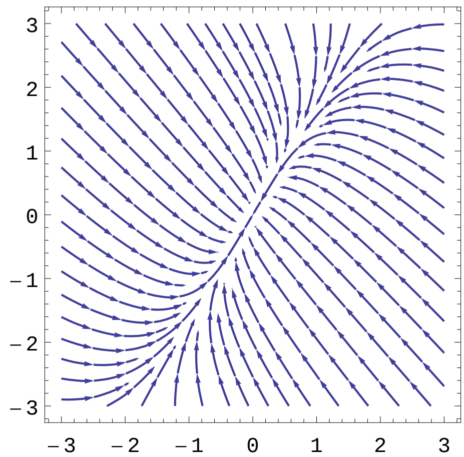
10. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

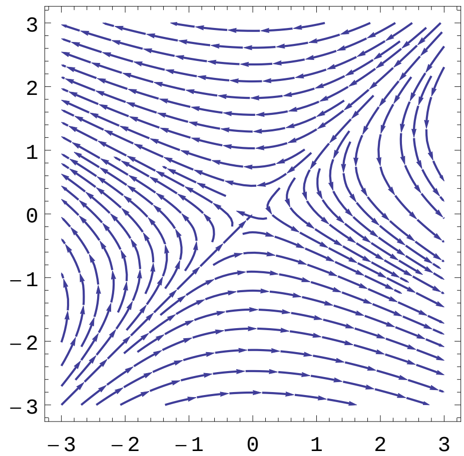
(a)



(b)



(c)



(d)