D-ERDW, D-HEST, D-USYS   Mathematik I   HS 14

Dr. Ana Cannas

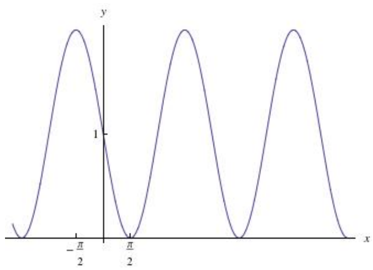
MC-Serie 1

Einsendeschluss: 3. Oktober 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche Funktion besitzt den folgenden Graphen?



(a) $f(x) = 1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

√ (b) $f(x) = 1 + \sin(x - \pi)$.

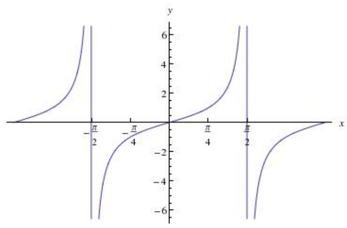
(c) $f(x) = -1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(d) $f(x) = -1 + \sin(x - \pi)$.

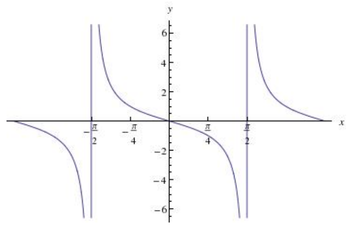
Die Funktion $f(x) = 1 + \sin(x - \pi)$ hat den Graphen, der entsteht, wenn man $\sin(x)$ in x-Richtung um $-\pi$ und in y-Richtung um 1 verschiebt.

2. Welcher ist der Graph der Funktion

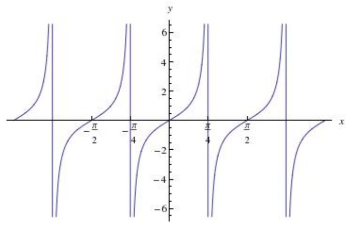
$$f(x) = \tan(-2x)?$$



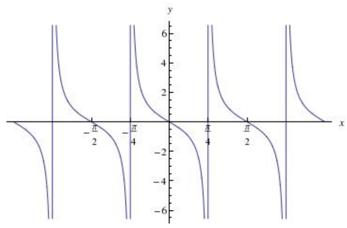
(a)



(b)



(c)



√ (d)

Man sieht, dass die Funktion $\tan(-2x)$ den Graphen hat, der entsteht, wenn $\tan(x)$ an der y-Achse gespiegelt wird und mit Polstellen bei $\pm\frac{\pi}{4}$.

3. Welche der folgenden Funktionen ist streng monoton wachsend im Intervall $]-1,1[$?

(a) $x \mapsto x^2$

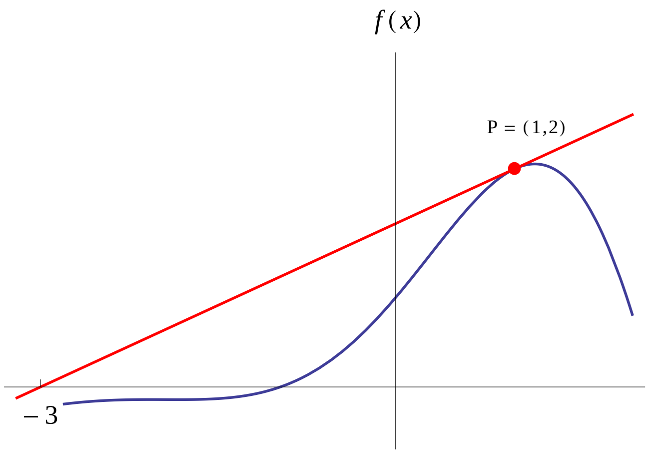
(b) $x \mapsto |x| + x$

√ (c) $x \mapsto -e^{-x}$

(d) $x \mapsto \arccos x$

Auf $]-1,0]$ ist x^2 streng monoton fallend und $|x|+x = 0$ konstant, also scheiden diese aus. Die Funktion $x \mapsto \arccos x$ ist sowieso streng monoton fallend. Nur die Exponentialfunktion $x \mapsto -e^{-x}$ ist hier streng monoton wachsend.

4. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

√ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **nicht** stetig?

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = |0|$$

und somit ist die Funktion stetig.

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ e - x + 1, & x \leq 1. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 1} e^x = e = e - 1 + 1$$

und somit ist die Funktion stetig.

√ (c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x > 0 \\ 3x, & x \leq 0. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 0} 2x + 3 = 3 \neq 3 \cdot 0$$

und somit ist die Funktion *nicht* stetig.

(d) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x < 3. \end{cases}$

Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 = 2 \cdot 3$$

und somit ist die Funktion stetig.

6. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = (x+2)\frac{|x-1|}{x-1}$$

ist **falsch**?

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = -2.$

Man berechnet

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\frac{|-1|}{-1} = 2\cdot -1 = -2.$$

(b) $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3.$

Man berechnet

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 3\cdot 1 = 3.$$

(c) $\lim_{x\to 1-} f(x) = -3.$

Man berechnet

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 3\cdot(-1) = -3.$$

√ (d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$

Falls der Grenzwert existiert, muss

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1+} f(x) = 3\cdot 1 = 3 \\ \lim_{x\to 1-} f(x) = 3\cdot(-1) = -3 \end{cases}$$

also existiert dieser Grenzwert nicht.

7. Welche der folgenden Formeln ist im Allgemeinen **falsch**?

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

Das ist der hyperbolische Satz des Pythagoras.

(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x.$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \cosh 2x.\end{aligned}$$

(c) $2\cosh^2 x = 1 + \cosh 2x.$

Es gilt

$$2\cosh^2 x = 1 + \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + \cosh 2x,$$

wobei die erste Gleichheit mit der ersten, die zweite mit der zweiten Formel folgt.

√ (d) $2\sinh^2 x = 1 + \sinh 2x.$

Wie oben folgt

$$2\sinh^2 x = \sinh^2 x + \cosh^2 x - 1 = \cosh 2x - 1.$$

Erfüllt x die angegebene Formel, so folgt also

$$2 = \cosh 2x - \sinh 2x = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = e^{-2x}$$

also $x = -\frac{\ln 2}{2}$. Für alle übrigen $x \in \mathbb{R}$ ist die Formel falsch.

8. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Die Ableitung der Funktion

(a) $x(t) = \sin\left(e^{2t}\right)$ ist $\dot{x}(t) = 2e^{2t}\cos\left(e^{2t}\right)$.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Andwendung der Kettenregel

$$\dot{x}(t) = \left(e^{2t}\right)' \cos\left(e^{2t}\right) = 2e^{2t}\cos\left(e^{2t}\right).$$

√ (b) $x(t) = \dfrac{1}{t^2} + t\ln t, \quad t > 0,$ ist $\dot{x}(t) = -\dfrac{2}{t^2} + \ln t + t$.

Falsch. Es gilt $\dot{x}(t) = -\dfrac{2}{t^3} + \ln t + 1$.

(c) $x(t) = e^{\ln t + t^2}, \quad t > 0,$ ist $\dot{x}(t) = \left(1 + 2t^2\right)e^{t^2}$.

Richtig. Es gilt $x(t) = e^{\ln t}e^{t^2} = te^{t^2}$, also $\dot{x}(t) = e^{t^2} + 2t^2e^{t^2}$.

(d) $x(t) = \dfrac{\sin^2(t^2)}{\cos(t^2)}$ ist $\dot{x}(t) = 2t\sin(t^2)\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2(t^2)}\right)$.

Richtig. Es gilt $x(t) = \dfrac{1-\cos^2(t^2)}{\cos(t^2)} = \dfrac{1}{\cos(t^2)} - \cos(t^2)$, also

$$\dot{x}(t) = -\frac{-2t\sin(t^2)}{\cos^2(t^2)} + 2t\sin(t^2) = 2t\sin(t^2)\left(1 + \frac{1}{\cos^2(t^2)}\right).$$

9. Die Umkehrfunktion $g(y)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2e^x}$ auf dem Intervall $(0,1)$ ist:

(a) $g(y) = \ln\left(1 + 2e^{-y}\right)$.

√ (b) $g(y) = \ln\left(\dfrac{1-y}{2y}\right)$.

(c) $g(y) = 1 + 2e^y$.

(d) $g(y) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-y}$.

Für $y = f(x) = \dfrac{1}{1+2e^x}$ folgt

$$1 + 2e^x = \frac{1}{y} \Rightarrow e^x = \frac{1-y}{2y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{2y}\right).$$

Es ist zu Beachten, dass die Funktion f nicht surjektiv ist. Sie hat den Wertebereich $(0,1)$ und ist daher nur auf $(0,1)$ invertierbar.

10. Sei $f(x) = \pi + 2\arctan(x)$ und $g(x)$ ihre Umkehrfunktion.
Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $f(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Der Definitionsbereich von arctan ist $\mathbb{R}$, das ändert sich nicht nach Skalierung und Verschiebung. Da arctan überall differenzierbar ist, gilt das auch für f, wobei

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Der Wertebereich von $f(x)$ ist $(0, 2\pi)$.

Der Wertebereich von arctan ist und f dort injektiv ist, ist $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Somit ist der Wertebereich von f gleich $\pi + 2\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2\pi)$

√ (c) $g(x)$ ist für alle reelle x definiert und differenzierbar.

Da der Wertebereich von f gleich $(0, 2\pi)$ ist die Umkehrfunktion nur auf diesem Intervall definiert und differenzierbar.

(d) $g(x) = \cot\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

Man verwende die Beziehung $\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Dann ist

$$\tan\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x-\pi}{2}\right)\right) = \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right).$$