D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 2

Einsendeschluss: 10. Oktober 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Was ist die Steigung der Tangente in $x = \dfrac{\pi^2}{4}$ an den Graphen von

$$f(x) = \cos\sqrt{x}?$$

(a) $-1.$

(b) $-\pi.$

√ (c) $-\dfrac{1}{\pi}.$

(d) $-\dfrac{\pi^2}{2}.$

Die Steigung der Tangente in $x = \dfrac{\pi^2}{4}$ an den Graphen von $f(x)$ entspricht genau der ersten Ableitung $f'(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = \dfrac{\pi^2}{4}$. Man berechnet

$$f'(x) = \left(-\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dann ist

$$f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\frac{\pi}{2}} = -1 \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

2. Wie lautet die Ableitung von

$$f(x) = 2^{x^2+1}?$$

(a) $2x \cdot 2^{x^2}$.

(b) $(x^2+1) \cdot 2^{x^2}$.

(c) $(\ln 2)2^{x^2+1}$.

√ (d) $4x(\ln 2)2^{x^2}$.

Man berechnet mit der Kettenregel für $f(x) = 2^{h(x)}$ mit $h(x) = x^2 + 1$

$$f'(x) = h'(x)(\ln(2))2^{h(x)}$$

dann ist

$$f'(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2+1}.$$

3. Was ist die Linearisierung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

bei $x = 2$?

(a) $L(x) = 1 + \frac{1}{4}x$.

√ (b) $L(x) = 1 - \frac{1}{4}x$.

(c) $L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$.

(d) $L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$.

Die Linearisierung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist gegeben durch $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Man berechnet

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f'(x_0) = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=2} = -\frac{1}{4}.$$

Dann ist

$$L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) = 1 - \frac{1}{4}x.$$

4. Die Gleichung

$$y^2 = x^2 - \sin(xy) + 1$$

definiert y als differenzierbare Funktion von x in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 1)$. Was ist die Ableitung $\dfrac{dy}{dx}$ dieser Funktion?

(a) $\dfrac{2y + x\cos(xy)}{2x - y\cos(xy)}$.

(b) $\dfrac{2y + x\cos(xy)}{-2x + y\cos(xy)}$.

√ (c) $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}$.

(d) $\dfrac{-2x + y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}$.

$y(x)$ erfüllt

$$\begin{cases} y(x)^2 - x^2 + \sin(xy(x)) - 1 = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ableiten der Gleichung für $y(x)$ unter Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(y^2 - x^2 + \sin(xy) - 1\right) = 0 \\ \iff \quad & 2y\frac{dy}{dx} - 2x + \cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0 \\ \iff \quad & (2y + x\cos(xy))\,\frac{dy}{dx} = 2x - y\cos(xy) \end{aligned}$$

und weil $2y + x\cos(xy) \neq 0$ in einer Umgebung von $(1, 0)$ folgt, dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y\cos(xy)}{2y + x\cos(xy)}.$$

5. Die Funktion $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ ist

√ (a) gerade und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

(b) ungerade und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

(c) gerade und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(d) ungerade und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{2}{e^x-1} + \frac{x}{2}\frac{e^x-1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}, \qquad \text{also}$$
$$f(-x) = \frac{-x}{2}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \frac{-x}{2}\frac{1+e^x}{1-e^x} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = f(x).$$

Zudem ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} + \dfrac{0}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1$ (unter Anwendung von BH).

6. Welche der folgenden Identitäten ist **falsch**?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = 0$.

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = \dfrac{\sin(\pi\cdot 0)}{\pi\cdot 0 - 1} = \dfrac{0}{-1} = 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = 0$.

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin(x^2)+1} = \dfrac{\ln(0+1)}{\sin 0 + 1} = \dfrac{\ln 1}{1} = 0$.

√ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos x - 1} = 0$.

Die zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\sin x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2}{-\cos x} = -2.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = 0$.

Die Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

7. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

(a) nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

√ (d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

Die Regel von de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Für $x = 1$ gilt $x^3+x-2=0$ und $x^2-3x+2=0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

8. Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um 0 der Hyperbelfunktion $\cosh x$ ist

√ (a) $1+\frac{1}{2}x^2$.

(b) $1+x^2$.

(c) $1+2x^2$.

(d) $2+x^2$.

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um 0 ist gegeben durch

$$\cosh(0)+\cosh'(0)x+\frac{\cosh''(x)}{2}x^2 = 1+\sinh(0)x+\frac{\cosh(0)}{2}x^2 = 1+\frac{1}{2}x^2.$$

9. Das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ ist

√ (a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

(b) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^3$.

(c) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

(d) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

Es gelten

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x} \cos x, \\ f''(x) &= e^{\sin x} \cos^2 x - e^{\sin x} \sin x, \\ f'''(x) &= e^{\sin x} \cos^3 x - 3\, e^{\sin x} \cos x \sin x - e^{\sin x} \cos x, \end{aligned}$$

also $f(0) + f'(0)\, x + \dfrac{f''(0)}{2}\, x^2 + \dfrac{f'''(0)}{6}\, x^3 = 1 + 1\, x + \dfrac{1}{2}\, x^2 + 0\, x^3$.

10. Wenn man zwei Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

√ (a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) multipliziert.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Die Taylorreihe der Summe $f + g$ zweier Funktionen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Wegen

$$(f+g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)$$

ist die erste Antwort die richtige.