D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 3

Einsendeschluss: 17. Oktober 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Das Maximum der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

im Intervall $[1, 5]$ ist

(a) 0.

(b) 1.

✓ (c) $\frac{1}{e}$.

(d) $\frac{\ln 5}{5}$.

Die inneren kritischen Stellen sind Nullstellen der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Dann ist $f'(x) = 0 \iff x = e$, wobei $f(e) = \frac{1}{e}$. Ausserdem ist $f(1) = 0 < e$ und $f(5) = \frac{\ln 5}{5} < e$. Also ist $\frac{1}{e}$ das Maximum von f im Intervall $[1, 5]$.

2. Das Minimum der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

im Intervall $[1,5]$ ist

√ (a) 0.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{e}$.

(d) $\frac{\ln 5}{5}$.

Die inneren kritischen Stellen sind Nullstellen der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Dann ist $f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = e$, wobei $f(e) = \frac{1}{e}$. Ausserdem ist $f(1) = 0 < e$ und $f(5) = \frac{\ln 5}{5} > 0$. Also ist 0 das Minimum von f im Intervall $[1,5]$.

3. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2$$

im Intervall $[0,1]$ ist richtig?

(a) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(b) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

√ (c) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

(d) f nimmt in $[0,1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

Die kritischen Stellen von f sind die Nullstellen der ersten Ableitung,

$$0 \stackrel{!}{=} f'(x) = x\,(3x - 2)\,.$$

Also hat f kritische Stellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$. An diesen Stellen nimmt f die Werte

$$f(0) = 0 \text{ und } f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

an. Ausserdem gilt an den Randstellen des Definitionsbereiches $[0,1]$

$$f(0) = 0 \text{ und } f\,(1) = 0.$$

Daher sind die Stellen $x = 0, 1$ jeweils globale Maxima und $x = \frac{2}{3}$ das globale Minimum im Intervall $[0,1]$.

4. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{D}$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Gilt $f'(x) = 0$, so nimmt f in x ein Extremum an.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ keine Minimalstelle von $f(x) = x^3$.

(b) Gilt $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$, so nimmt f in x ein Maximum an.

Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so nimmt f ein Minimum in x an, vgl. zum Beispiel $f(x) = x^2$, dann nimmt f in $x = 0$ ein Minimum an.

(c) Nimmt f in x ein Extremum an, so gelten $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

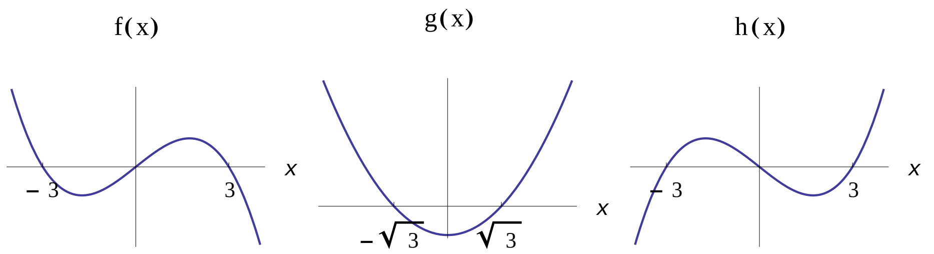
Falsch. Z.B. ist $x = 0$ ein Minimum von $f(x) = x^4$.

√ (d) Gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f in x einen Wendepunkt.

Richtig. x ist dann ein Sattelpunkt.

5. Die folgenden Bilder zeigen die Graphen dreier rellen Funktionen einer reellen Variable, $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist.

Welche Aussage ist richtig?



(a) $f' = g$.

(b) $g' = f$.

(c) $f' = h$.

√ (d) $h' = g$.

Die Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ haben im Intervall $[-3, 3]$ jeweils zwei Extrema, also müssen die ersten Ableitungen dort 0 sein. Die Funktion $f(x)$ ist auf $(-\infty, -3]$ (resp. $[3, +\infty)$) monoton fallend, die Ableitung nimmt dort also negative Werte an, während $h(x)$ auf $(-\infty, -3]$ (resp. $[3, +\infty)$) monoton steigend ist, die Ableitung nimmt dort also positive Werte an. Also kann nur der Graph von g der Graph der Ableitung von h sein.

6. Sei x_n eine Approximation von einer Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - \alpha$$

wobei $\alpha > 0$. Was ist unter Anwendung des Newtonverfahrens die nächste Approximation x_{n+1}?

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right).$

√ (c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right).$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

7. Welche ist eine korrekte Stammfunktion von

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+2x}?$$

√ (a) $\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|.$

(b) $\arctan(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}.$

(c) $\operatorname{arsinh}(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|.$

(d) $\operatorname{arsinh}(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}.$

Man berechnet

$$\int_0^x \frac{1}{1+\tilde{x}^2} + \frac{1}{1+2\tilde{x}} d\tilde{x} = \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|,$$

wobei man $\frac{1}{2}$ vor $\ln|1+2x|$ mit Substitition $t = 2\tilde{x}$, also $\frac{1}{2}dt = d\tilde{x}$ erhält. Alternativ findet man auch

$$\left(\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2x}\cdot 2.$$

8. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen ist **falsch**?

(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

Richtig. Dies folgt aus $(F + G)' = F' + G'$.

√ (b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

Falsch. Z.B. ist $F(x) = G(x) = x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) = 1$, aber x^2 keine Stammfunktion von 1.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

Richtig. Dies folgt aus $(F + c)' = F'$.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

Richtig. Es gilt nämlich $(FG)' = fG + Fg$.

9. Welche der folgenden Formeln ist **keine** Rechenregel, die für alle $x, y, z > 1$ gültig ist?

√ (a) $(x^y)^z = x^{(y^z)}$.

(b) $\dfrac{x^y}{x^{y-z}} = x^z$.

(c) $\log_x x^{yz} = yz$.

(d) $\log_x y^z = z \log_x y$.

Es gelten für alle $x, y, z > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{x^y}{x^{y-z}} &= \frac{x^y}{x^y \cdot x^{-z}} = \frac{1}{x^{-z}} = x^z, \\ \log_x x^{yz} &= yz \log_x x = yz, \\ \log_x y^z &= z \log_x y \end{aligned}$$

jedoch ist

$$(x^y)^z = x^{yz}$$

und somit ist die erste Aussage im Allgemeinen falsch.

10. Die Gleichung

$$x \ln x = 1$$

besitzt im Intervall $[1, 3]$

(a) keine Lösung.

√ (b) genau eine Lösung.

(c) genau zwei Lösungen.

(d) drei oder mehr Lösungen.

Hinweis: Zwischenwertsatz.
Wir wenden den Zwischenwertsatz an. Da $x \ln x|_{x=1} = 0$ und $x \ln x|_{x=3} = 3 \ln 3 > 3$ und $0 < 1 < 3 \ln 3$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Stelle $z \in [1, 3]$ gibt, so dass $z \ln z = 1$. Ausserdem gilt $(x \ln x)' = \ln x + 1$ und dies ist immer positiv im Intervall $[1, 3]$. Daher ist $x \ln x$ auf $[1, 3]$ monoton wachsend und somit $x = z$ die einzige Stelle, wo $x \ln x = 1$.