D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

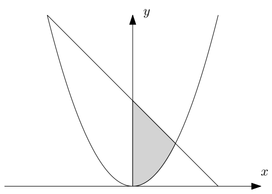
MC-Serie 4

Einsendeschluss: 24. Oktober 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur im ersten Quadrant, die zwischen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = 2 - x$ liegt?



√ (a) $F = \frac{7}{6}$.

(b) $F = \frac{4}{3}$.

(c) $F = \frac{5}{6}$.

(d) $F = \frac{10}{3}$.

Die beiden Funktionen schneiden sich in

$$x^2 = 2 - x \text{ das heisst dort wo } (x-1)(x+2) = 0$$

also im 1.Quadranten bei $x = 1$. Die Fläche zwischen den Kurven ist

$$F = \int_0^1 (2-x) - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

2. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

(a) $e^2 - 1$.

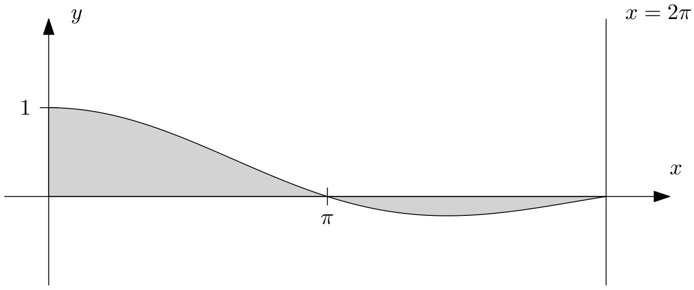
√ (b) $\dfrac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

(c) e^2.

(d) $2e^2$.

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

3. Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2\pi$ begrenzt wird



ist

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

√ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

(c) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right|$.

Im allgemeinen besteht die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f, den Koordinatenachsen und den Geraden $x = a$ und $x = b$, $a < b$, aus je einem Teil über und unter der Abszissenachse. Das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ liefert dann die Differenz der beiden Flächeninhalte, $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$ den Absolutbetrag der Differenz. Das Integral $\int_a^b |f(t)|\,dt$ zählt beide mit positivem Vorzeichen.

4. Welche der folgenden Funktionen ist für $x > 0$ **nicht** monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t \, \mathrm{d}t.$

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t.$

√ (c) $x \mapsto \int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t.$

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t \, \mathrm{d}t.$

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf (c) alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend.
Eine geometrische Begründung: Ausser bei (c) wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

5. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \, \mathrm{d}x.$

√ (a) $\dfrac{x^2}{x+1} + C.$

(b) $x - \dfrac{1}{x+1} + C.$

(c) $\dfrac{2}{(x+1)^3} + C.$

(d) $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} + C.$

Wegen $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ gilt

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - (x+1)^{-2}.$$

Damit können wir das gegebene Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \, \mathrm{d}x &= \int 1 \, \mathrm{d}x - \int (x+1)^{-2} \, \mathrm{d}x = x + (x+1)^{-1} + C \\
&= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C \\
&= \frac{x^2}{x+1} + \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir die Konstante 1 mit der Konstanten C zu einer neuen Konstanten $\tilde{C}$ zusammenfassen können. Somit ist Antwort 1 korrekt.

6. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

ist gleich

(a) $\ln\frac{1}{3}$.

√ (b) $\ln\frac{4}{3}$.

(c) $\ln 3$.

(d) $\ln 12$.

Mittels Partialbruchzerlegung berechnet man

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

Also muss

$$\begin{cases} A+B & =0 \\ 3A+2B & =-1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A=-1,\ B=1.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx = [\ln(x-3)-\ln(x-2)]_0^1 \\ &= \left[\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{-2}{-1}\right)-\ln\left(\frac{-3}{-2}\right) = \ln\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

7. Wie lautet die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \int_0^{x^2} \cos t\,dt?$$

(a) $2x+\cos x$.

(b) $2x\sin x$.

√ (c) $2x\cos\left(x^2\right)$.

(d) $\cos\left(x^2\right)-1$.

Mit Verwendung der Kettenregel für $g(x)=x^2$ erhält man

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)} \cos t\,dt\right) = \cos(g(x))g'(x) = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x.$$

8. Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Die Formel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) ist im Allgemeinen falsch.

(b) folgt aus der Substitutionsregel.

$\surd$ (c) folgt aus der partiellen Integration.

(d) ist falsch, falls f eine konstante Funktion ist.

Die Formel folgt durch partielle Integration der Funktion $1 \cdot f(x)$, wobei 1 integriert und $f(x)$ differenziert wird. Richtig ist also (c). Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung betrifft dagegen das bestimmte Integral. Substituiert wird auch nichts: Auf beiden Seiten steht $f(x)$ und nicht f von etwas anderem.

9. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x.$

✓ (b) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi.$

(c) $\displaystyle\int 2x^3 e^{x^2} \,\mathrm{d}x = x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} \,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1} \,\mathrm{d}x = x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x.$

Man überprüft leicht, die Formel für die partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

und findet, dass

$$\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \ln\underset{\downarrow}{(x)}dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx,$$

$$\begin{aligned}\int \sin\underset{\uparrow}{(\phi)}\cos\underset{\downarrow}{(\phi)}d\phi &= (-\cos(\phi))\cos(\phi) - \int (-\cos(\phi))(-\sin(\phi))\,d\phi \\ &= -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)d\phi,\end{aligned}$$

$$\int \underset{\uparrow}{\left(2xe^{x^2}\right)}\underset{\downarrow}{x^2}dx = e^{x^2}x^2 - \int e^{x^2}(2x)dx,$$

$$\int (x\underset{\uparrow}{+}1)^{\frac{1}{2}}\underset{\downarrow}{x}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}x - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Daher ist der zweite Ausdruck die korrekte Anwtort.

10. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergieren beide.

(b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert, aber $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ divergiert.

$\checkmark$ (c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert, aber $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ divergiert.

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ divergieren beide.

Für $1 < a$ gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{a} - \frac{-1}{1} = 1$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a (x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} 2\sqrt{a} - 2 = \infty.$$

Daher ist die dritte Antwort korrekt.