

MC-Serie 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Einsendeschluss: 31. Oktober 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

1. Welche ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \\ y(0) &= \pi \end{cases}$$

im Intervall $(-2, 2)$?

- ✓ (a) $y(x) = \arccos \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.
- (b) $y(x) = \arccos \frac{x}{2} + \pi$.
- (c) $y(x) = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.
- (d) $y(x) = \arcsin \frac{x}{2} + \pi$.

Eine Stammfunktion von $\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$ ist $\arccos z$. Substitution mit $z = \frac{x}{2}$ liefert $dz = \frac{1}{2}dx$ und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}} dx \\ &= \int \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} dz = \arccos z + C = \arccos \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \arccos \frac{x}{2} + C$$

und aus $y(0) = \pi$ folgt $C = \frac{\pi}{2}$.

2. Die Differentialgleichung

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1)$$

geht durch Trennen der Variablen über in

- (a) $yy' = \ln(x+1)$.
- (b) $\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + 1$.
- (c) $yy' = \ln(x+1)^2$.
- ✓ (d) $\frac{y'}{y+1} = \ln(x+1)$.

Die einzig korrekte Umformung ist:

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1) = (y+1)\ln(x+1) \Rightarrow \frac{y'}{y+1} = \ln(x+1).$$

3. Die Differentialgleichung $y' = x^2 + 2xy + y^2$

- (a) ist linear.
- (b) ist separierbar.
- (c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.
- ✓ (d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Mit $u = x + y$ folgt $y' = u' - 1 = (x+y)^2 = u^2$, die Substitution führt also auf die Differentialgleichung $u' = u^2 + 1$ mit getrennten Variablen.

4. Die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$

- ✓ (a) ist linear.
- (b) ist separierbar.
- (c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.
- (d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Diese DGL ist von der Form

$$y' = P(x)y + Q(x).$$

5. Die Differentialgleichung $y' = \frac{xy}{x^2-y^2} + \sin \frac{y}{x}$

- (a) ist linear.
- (b) ist separierbar.
- ✓ (c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.
- (d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Mit $u = \frac{y}{x}$ folgt $y' = u + xu' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \sin \frac{y}{x} = \frac{u}{1 - u^2} + \sin u$, die Substitution führt also auf die Gleichung $u' = \frac{1}{x} \left(\frac{u^3}{1 - u^2} + \sin u \right)$ mit getrennten Variablen.

6. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 3y \left(1 - \frac{y}{2} \right)$$

geht durch Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung über in

- ✓ (a) $\int \left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y} \right) dy = \int 3 dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.
- (b) $\int \left(\frac{2}{y-2} - \frac{2}{y} \right) dy = \int 3 dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $\int \left(\frac{2}{2-y} - \frac{1}{y} \right) dy = \int 3 dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.
- (d) $\int \left(\frac{1}{y-2} + \frac{2}{y} \right) dy = \int 3 dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

Man führt den Ausdruck via Trennung der Variablen auf

$$\frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{2} \right)} dy = 3 dx,$$

und Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{2} \right)} = \frac{2}{y(2-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2-y} = \frac{A(2-y) + By}{y(2-y)} = \frac{2A + (B-A)y}{y(2-y)},$$

deshalb muss $A = 1$ und $B = A$ sein. Zusammen liefert das

$$\left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y} \right) dy = 3 dx$$

und somit ist die erste Antwort korrekt.

7. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y = xy' + (y')^2$

Falsch, denn y' tritt quadratisch auf.

✓ (b) $\frac{y'}{1-x^2} + \frac{y}{1+x} = \frac{1}{x^2}$

Richtig, die Gleichung lässt sich umschreiben zu $y' = (x-1) \cdot y + \frac{1-x^2}{x^2}$

(c) $(y' - 2)^2 = y$

Falsch, denn y' tritt quadratisch auf auf.

(d) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

Falsch, denn y tritt quadratisch (und im Nenner) auf.

8. Die Lösung $Y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dY(t)}{dt} = 2Y(t) - 10, \quad Y(0) = 6,$$

erfüllt

✓ (a) $Y(1) = e^2 + 5.$

(b) $Y(1) = 2.$

(c) $Y(1) = e^2 - 10.$

(d) $Y(1) = -8.$

Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dY}{Y(t) - 5} = 2dt$$

und somit

$$\int \frac{dY}{Y(t) - 5} = \int 2dt \Rightarrow \ln |Y(t) - 5| = 2t + C \Rightarrow Y(t) = \tilde{C}e^{2t} + 5$$

und mit der Anfangsbedingung

$$Y(0) = 6 = \tilde{C} + 5 \Rightarrow \tilde{C} = 1.$$

Also ist die Lösung gleich

$$Y(t) = e^{2t} + 5$$

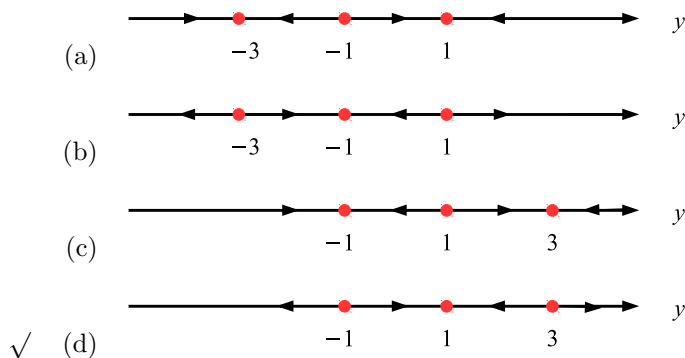
und liefert

$$Y(1) = e^2 + 5.$$

9. Welches Bild stellt die Phasenlinie der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 1)(y - 3)$$

dar?



Diese Differentialgleichung ist autonom: $\frac{dy}{dx} = g(y)$, wobei

$$g(y) = (y + 1)(y - 1)(y - 3).$$

Die Gleichgewichtspunkte sind die Werte y , für die $g(y) = 0$, d.h.

$$y = -1, \quad y = 1, \quad \text{und} \quad y = 3.$$

Falls $y > 3$, ist $y + 1 > 0$, $y - 1 > 0$, $y - 3 > 0$, deshalb ist $g(y) > 0$, d.h. y nimmt zu.

Falls $1 < y < 3$, ist $y + 1 > 0$, $y - 1 > 0$, $y - 3 < 0$, deshalb ist $g(y) < 0$, d.h. y nimmt ab. Die restlichen Fälle sind analog.

10. Wir betrachten die Stabilität der Gleichgewichtspunkte der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y.$$

- (a) $y = 0$ und $y = 2$ sind beide stabile Gleichgewichtswerte.
- ✓ (b) $y = 0$ ist ein stabiler Gleichgewichtswert aber $y = 2$ ist instabil.
- (c) $y = 0$ ist ein instabiler Gleichgewichtswert aber $y = 2$ ist stabil.
- (d) $y = 0$ und $y = 2$ sind beide instabile Gleichgewichtswerte.

Die Funktion $y^2 - 2y = y(y - 2)$ hat Nullstellen bei $y = 0$ und $y = 2$. Der Wert von $y(y - 2)$ ist für $y < 0$ und $y > 2$ positiv aber für $0 < y < 2$ negativ. Daher ist bei $y = 0$ ein stabiler Gleichgewichtswert, jedoch bei $y = 2$ ein instabiler.

