

MC-Serie 6 Komplexe Zahlen

Einsendeschluss: 7. November 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

1. Sei $z \in \mathbb{C}$. Stets reell ist

- (a) $z - \bar{z}$.
- (b) $\frac{z}{\bar{z}}$.
- (c) z^2 .
- ✓ (d) $e^z e^{\bar{z}}$.

Mit $z = x + iy$ bzw. $\bar{z} = x - iy$ ergeben sich

$$\begin{aligned}z - \bar{z} &= x + iy - x + iy = 2iy \in i\mathbb{R}, \\ \frac{z}{\bar{z}} &= \frac{x + iy}{x - iy} \cdot \frac{x + iy}{x + iy} = \frac{x^2 + 2xyi - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}i \in \mathbb{C}, \\ z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \in \mathbb{C}, \\ e^z e^{\bar{z}} &= e^{z+\bar{z}} = e^{x+iy+x-iy} = e^{2x} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Also ist die letzte Antwort richtig.

2. Sei $z \in \mathbb{C}$. Welche Aussage ist im Allgemeinen **falsch**?

- (a) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(iz)$.
- ✓ (b) $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(iz)$.
- (c) $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Im}(iz)$.
- (d) $\operatorname{Im}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(iz)$.

Mit $z = x + iy$ bzw. $iz = -y + ix$ und $\bar{z} = x - iy$ ergeben sich

$$\operatorname{Re}(iz) = -y = \operatorname{Im}(\bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(iz) = x = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}).$$

3. Die Punktmenge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 9| = 4\}$$

ist ein Kreis

- (a) um $z_0 = 4$ mit Radius 9.
- (b) um $z_0 = 4$ mit Radius 3.
- ✓ (c) um $z_0 = 9$ mit Radius 4.
- (d) um $z_0 = 9$ mit Radius 2.

Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} |z - 9|^2 &= 4^2 \\ \operatorname{Re}(z - 9)^2 + \operatorname{Im}(z - 9)^2 &= 4^2 \\ (x - 9)^2 + y^2 &= 4^2. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um einen Kreis um $z_0 = 9 + i \cdot 0 = 9$ mit Radius 4.

4. Die Punktmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \operatorname{Re}(z) + 1\}$ ist

- (a) eine Ellipse.
- ✓ (b) eine Parabel.
- (c) eine Hyperbel.
- (d) keine der obigen Kurven.

Mit $z = x + iy$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= |z|^2 - (\operatorname{Re}(z) + 1)^2 = x^2 + y^2 - (x + 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 2 \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \right) - 2x. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um die Parabel $x = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}$.

5. Der Wert von $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ ist gleich

- (a) 1
- (b) $-i$
- (c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{i}{2}$
- ✓ (d) keine der obigen

$$e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

6. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3}-i$ und $w = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. Welche Aussage über $\frac{z}{w}$ ist korrekt?

- (a) $\left| \frac{z}{w} \right| = 4$ und $\arg \left(\frac{z}{w} \right) = \frac{7\pi}{6}$.
- ✓ (b) $\left| \frac{z}{w} \right| = 4$ und $\arg \left(\frac{z}{w} \right) = \frac{\pi}{2}$.
- (c) $\left| \frac{z}{w} \right| = 1$ und $\arg \left(\frac{z}{w} \right) = \frac{7\pi}{6}$.
- (d) $\left| \frac{z}{w} \right| = 1$ und $\arg \left(\frac{z}{w} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Es gilt $z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ und $w = \frac{1}{2}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ausserdem ist

$$\arg \left(\frac{z}{w} \right) = \arg(z) - \arg(w) = \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

sind

- (a) $\sqrt{2} + i, \sqrt{2} - i$.
- ✓ (b) $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$.
- (c) $(\sqrt{2} + 1)i, (\sqrt{2} - 1)i$.
- (d) keine der obigen.

Mit der Mitternachtsformel für Nullstellen von quadratischen Polynomen folgt, dass

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i.$$

8. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^3 + 8$ sind

- (a) $-2, 2i, -2i$.
- (b) $-2, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.
- (c) $2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, -2$.
- ✓ (d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\pi}, 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Man überprüft, dass

$$\begin{aligned}(2e^{i\frac{\pi}{3}})^3 &= 2^3 e^{i\pi} = -8 \\ (2e^{i\pi})^3 &= 2^3 e^{3i\pi} = -8 \\ (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 &= 2^3 e^{-i\pi} = -8.\end{aligned}$$

9. Gegeben sei das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2$. Bemerken Sie, dass $p(\lambda)$ nur von λ^2 abhängt.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a) Das Polynom hat keine Nullstellen (weder reelle noch komplexe).
- (b) p hat mindestens eine reelle Nullstelle.
- ✓ (c) p hat 2 Paare komplex konjugierte Nullstellen.
- (d) Die Nullstellen können nicht bestimmt werden.

Das Polynom kann geschrieben werden als,

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2 = (\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 1).$$

Man sieht, dass die Nullstellen genau die komplex konjugierten Paare

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i \text{ und } \lambda_{3,4} = \pm i$$

sind.

10. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$.

Welche der folgenden Zahlen sind mögliche Werte der Summe $z + w$?

- (a) i .
- ✓ (b) $\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (c) 1 .
- (d) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es gelten $z \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{4}} \mid k = 0, 1, 2, 3 \right\}$ und $w \in \left\{ e^{\frac{3\pi i}{6} + \frac{2k\pi i}{3}} \mid k = 0, 1, 2 \right\}$, also

$$z \in \{1, -1, i, -i\} \quad \text{und} \quad w \in \left\{ i, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right\}.$$