

Serie 7: Gauss-Verfahren

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 7 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 10./12. November.

1. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme durch das Gauss-Verfahren. Beschreiben Sie welchen Typ jede als Schnittmenge von Geraden hat.

a)

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \\2x + 3y &= 1.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2x + 4y &= 3 \\3x + 6y &= 2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}2x + 4y &= 2 \\3x + 6y &= 3.\end{aligned}$$

2. Finden Sie alle möglichen Lösungen der folgenden Linearen Gleichungssystemen und beschreiben Sie welchen Typ diese als Schnittmenge von Ebenen hat.

a)

$$\begin{aligned}x + 4y + z &= 0 \\4x + 13y + 7z &= 0 \\7x + 22y + 13z &= 1\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b)

$$\begin{aligned}x + y - z &= 0 \\4x - y + 5z &= 0 \\6x + y + 4z &= 0\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x + 4y + z &= 0 \\4x + 13y + 7z &= 0 \\7x + 22y + 13z &= 0\end{aligned}$$

3. Betrachten Sie folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y - z &= 2 \\x + 2y + z &= 3 \\x + y + (k^2 - 5)z &= k,\end{aligned}$$

wobei k eine beliebige Konstante ist. Für welche Werte von k

- a) hat dieses System eine eindeutige Lösung?
- b) hat dieses System unendlich viele Lösungen?
- c) ist das System inkonsistent, das heisst es ist nicht lösbar?

4. a) Stellen Sie sich vor, sie machen eine Schifffahrt vom Rheinfall nach Rheinau und wieder zurück. Die Reise flussabwärts von Rheinfall nach Rheinau dauert 20min und die Rückfahrt 40min. Die Entfernung zwischen Rheinfall und Rheinau entlang des Flusses beträgt 8km.

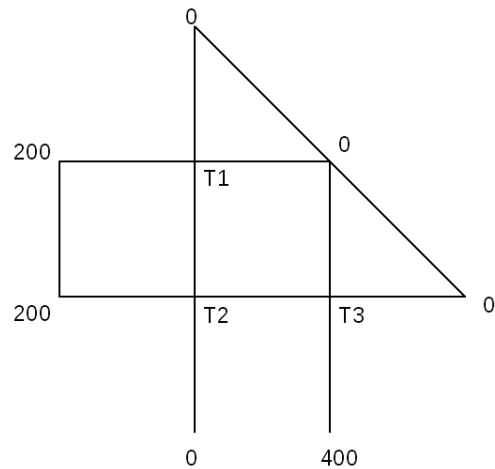
Wie schnell fährt das Schiff (relativ zum Wasser) und wie schnell fliesst das Wasser im Rhein?

b) Betrachten Sie untenstehendes Gitter aus Drähten, wobei die Temperatur der äusseren Punkte konstant ist. Wenn sich das Gitter im thermischen Gleichgewicht befindet, ist die Temperatur der inneren Gitterpunkte genau der Mittelwert der vier benachbarten Gitterpunkte. Zum Beispiel

$$T_2 = \frac{T_3 + T_1 + 200 + 0}{4}.$$

Bestimmen Sie die Werte T_1 , T_2 und T_4 wenn sich das Gitter im Gleichgewicht befindet.

Siehe nächstes Blatt!



5. Schreiben Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Matrixform und lösen Sie sie.

a)

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 5 \\ 2x + 3y + 4z &= 2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

c)

$$x + 2y + 3z = 4.$$

d)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ -x - 2y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

e)

$$\begin{array}{rccccrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & + & 4x_4 & = & -8 \\ & & & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -12. \end{array}$$

Die Lösungen sind

1. a) $(x, y) = (-1, 1)$.
b) keine Lösung.
c) $(x, y) = (1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. a) keine Lösung.
b) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
c) $(x, y, z) = (-5t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. a) $k \neq \pm 2$.
b) $k = 2$.
c) $k = -2$.
4. a) Schiffgeschw. = 18 km/h und Wassergeschw = 6 km/h.
b) $(T_1, T_2, T_3) = (75, 100, 125)$.
5. a) $(x, y, z) = (10t + 13, -8t - 8, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2t, t, 0, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
c) $(x, y, z) = (4 - 2s - 3t, s, t)$, $t, s \in \mathbb{R}$.
d) keine Lösung.
e) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2t, 3t + 4, t, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.