MC-Serie 7

Lineare DGL 2. Ordnung und Aufholen der Serien 1-4

Einsendeschluss: 14. November 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 0$$

(wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) ist korrekt?

(a) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

(b) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

(c) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x$.

Nein, sh. Erläuterung bei Alternativantwort.

√ (d) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Richtig. Die charakteristische Gleichung ist $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$. Wegen der doppelten reellen Nulstelle -1 ist die allgemeine Lösung wie angegeben.

2. Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0?$$

(a) $r^2 - 3r = 0$.

√ (b) $r^2 - 3r + 2 = 0$.

(c) $1 - 3r + 2r^2 = 0$.

(d) $r - r^3 + r^2 = 0$.

Das Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{rx}$ in die DGL liefert die charakteristische Gleichung $r^2 - 3r + 2 = 0$.

3. Gegeben seien die Lösungen

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

einer linearen homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Welche der folgenden Funktionen ist **keine** Lösung dieser DGL?

(a) 0.

Die triviale Lösung ist immer eine Lösung einer homogenen DGL.

√ (b) xe^x.

Da es sich um eine lineare homogene DGL handelt und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unaghängige Lösungen der DGL sind, ist die allgemeine Lösung $ay_1 + by_2(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ die DGL. xe^x lässt sich jedoch nicht als solche Kombination darstellen.

(c) $\cosh x$.

Da es sich um eine lineare homogene DGL handelt und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL sind, lösen auch alle Kombinationen $ay_1 + by_2(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ die DGL. Man verwendet $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

(d) $4e^x - 3e^{-x}$.

Da es sich um eine lineare homogene DGL handelt und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL sind, lösen auch alle Kombinationen $ay_1 + by_2(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ die DGL.

4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^x \ .$$

Welcher der folgenden Lösungsansätze für eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist geeignet?

(a) $y_{\text{spez}}(x) = ke^x$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

√ (b) $y_{\text{spez}}(x) = kxe^x$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(c) $y_{\text{spez}}(x) = ke^{4x}$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(d) $y_{\text{spez}}(x) = kxe^{4x}$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

Da diese Differentialgleichung von 2. Ordnung ist und e^x eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist, verwendet man den Ansatz kxe^x.

5. Die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'' + 16y = e^{3x}$$

ist von der Form

√ (a) $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{5}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{25}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung ist

$$r^2 + 16 = 0$$

welches Wurzeln $r_{1,2} = \pm 4i$ hat. Die homogene Lösung besteht daher aus reellen Linearkombinationen von

$$\cos(4x) \text{ und } \sin(4x).$$

Also ist die homogene Lösung

$$y_h(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x).$$

Einsetzen des Ansatzes $y_p(x) = ke^{3x}$ für die partikuläre Lösung gibt

$$9ke^{3x} + 16ke^{3x} = e^{3x}$$

das heisst $25k = 1$, also $k = \frac{1}{25}$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}.$$

6. Die Funktion $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ ist

√ (a) gerade und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

(b) ungerade und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

(c) gerade und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

(d) ungerade und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{2}{e^x - 1} + \frac{x}{2}\frac{e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad \text{also}$$
$$f(-x) = \frac{-x}{2}\frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{-x}{2}\frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = f(x).$$

Zudem ist $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{0}{2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1$ (unter Anwendung von BH).

7. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{D}$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Gilt $f'(x) = 0$, so nimmt f in x ein Extremum an.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ keine Minimalstelle von $f(x) = x^3$.

(b) Gilt $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$, so nimmt f in x ein Maximum an.

Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so nimmt f ein Minimum in x an, vgl. zum Beispiel $f(x) = x^2$, dann nimmt f in $x = 0$ ein Minimum an.

(c) Nimmt f in x ein Extremum an, so gelten $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

Falsch. Z.B. ist $x = 0$ ein Minimum von $f(x) = x^4$.

√ (d) Gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f in x einen Wendepunkt.

Richtig. x ist dann ein Sattelpunkt.

8. Sei x_n eine Approximation von einer Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - \alpha$$

wobei $\alpha > 0$. Was ist unter Anwendung des Newtonverfahrens die nächste Approximation x_{n+1}?

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

√ (c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

9. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

√ (a) $\frac{x^2}{x+1} + C$.

(b) $x - \frac{1}{x+1} + C$.

(c) $\frac{2}{(x+1)^3} + C$.

(d) $\frac{x^2+x+2}{x+1} + C$.

Wegen $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ gilt

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - (x+1)^{-2}.$$

Damit können wir das gegebene Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = x + (x+1)^{-1} + C \\ &= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C \\ &= \frac{x^2}{x+1} + \tilde{C}.\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir die Konstante 1 mit der Konstanten C zu einer neuen Konstanten $\tilde{C}$ zusammenfassen können. Somit ist Antwort 1 korrekt.

10. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x.$

✓ (b) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi.$

(c) $\displaystyle\int 2x^3 e^{x^2} \,\mathrm{d}x = x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} \,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1} \,\mathrm{d}x = x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x.$

Man überprüft leicht, die Formel für die partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

und findet, dass

$$\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)} dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx,$$

$$\begin{aligned}\int \underset{\uparrow}{\sin(\phi)}\underset{\downarrow}{\cos(\phi)}d\phi &= (-\cos(\phi))\cos(\phi) - \int (-\cos(\phi))(-\sin(\phi))\,d\phi \\ &= -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)d\phi,\end{aligned}$$

$$\int \underset{\uparrow}{\left(2xe^{x^2}\right)}\underset{\downarrow}{x^2}dx = e^{x^2}x^2 - \int e^{x^2}(2x)dx,$$

$$\int \underset{\uparrow}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\underset{\downarrow}{x}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}x - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Daher ist der zweite Ausdruck die korrekte Anwtort.