Serie 8: Vektoren und Matrizen

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 8 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 17./19. November.

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ ist gegeben als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Beachten Sie, dass das Skalarprodukt Werte in $\mathbb{R}$ annimmt. Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stehen senkrecht aufeinander, falls $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

a) Finden Sie alle Vektoren, die senkrecht sind zu

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und machen Sie eine Skizze.

b) Finden Sie alle Vektoren in $\mathbb{R}^4$ die senkrecht stehen auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie den Parameter λ so, dass

a) die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ senkrecht sind.

b) die Vektoren $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ den Abstand $\sqrt{2}$ haben.

c) die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ einen Winkel von $30°$ einschliessen.

d) sich die Ebenen

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0, \\ 3x - y - z + 2 &= 0 \qquad \text{und} \\ 4x - y - 2z + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

in einer Geraden schneiden und bestimmen Sie diese Schnittgerade.

3. Das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ist der Vektor definiert durch

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Kombination von Kreuz- und Skalarprodukt für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ heisst Spatprodukt (oder gemischtes Produkt):

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

a) Zeigen Sie, dass das Spatprodukt der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gleich der Determinante der Matrix mit Zeilen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ist:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Das Spatprodukt ist nicht kommutativ (auch das Kreuzprodukt ist nicht kommutativ). Was ist der Unterschied zwischen

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \quad \text{und} \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]?$$

Hinweis: Aufgabe a).

c) Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\vec{u} \times \vec{v}, \quad \vec{v} \times \vec{w}, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,.$$

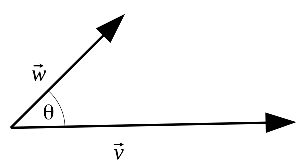
d) Seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\vec{v} \times \vec{w}$ und bestätigen Sie, dass

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 \, |\vec{w}|^2 \sin^2\theta.$$

Die obige Formel gilt auch für beliebige Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$, wobei θ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist.



e) Was ist eine geometrische Bedeutung von

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \quad \text{resp.} \quad \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|?$$

Hinweis:

- Was ist eine geometrische Bedeutung von $|\vec{v} \times \vec{w}|$ abgesehen von der Länge des Vektores $\vec{v} \times \vec{w}$. Betrachten Sie die Gleichung aus d)

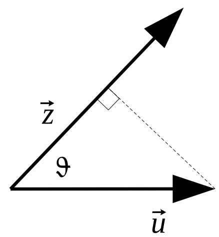
$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \, |\vec{w}| \sin\theta.$$

Bitte wenden!

- Verwenden Sie die für das Skalarprodukt bekannte Gleichung

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = |\vec{u}|\,|\vec{z}| \cos \vartheta,$$

wobei ϑ den Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezeichnet. Insbesondere ist $|\vec{u}| \cos \vartheta$ die Länge des Vektores, der durch orthogonale Projektion von $\vec{u}$ auf $\vec{v}$ entsteht.



4. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA und vergleichen Sie diese.

b) Berechnen Sie die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ und vergleichen Sie diese.

c) Berechnen Sie die Determinanten von A, C und AC und vergleichen Sie diese.

d) Welche der Produkte AD, AD^{T}, DA, $D^{\mathrm{T}}A$ sind definiert? Berechnen Sie diese.

5. Eine reelle $n \times n$-Matrix A, $n \in \mathbb{N}^*$, heisst *orthogonal*, wenn die zu A inverse Matrix A^{-1} gleich der Transponierten A^T ist, d.h. wenn $AA^T = A^TA = E_n$.

a) Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

sind orthogonal?

b) Zeigen Sie, dass eine quadratische reelle Matrix genau dann orthogonal ist, wenn ihre Spalten paarweise orthogonale Vektoren der Länge 1 sind.

Siehe nächstes Blatt!

c) Zeigen Sie, dass für eine orthogonale Matrix A stets $\det A = \pm 1$ gilt.

Hinweis: $\det(AA^T) = \det(E_n)$.

6. Berechnen Sie den Wert der folgenden 4-reihigen Determinanten mit Hilfe des *Laplaceschen Entwicklungssatzes*:

a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

b)

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Hinweis: Entwickeln Sie nach derjenigen Zeile oder Spalte, die die meisten Nullen enthält.

Bitte wenden!

Die Lösungen sind

1. **a)** $(x, y, z) = (-3r + t, r, t),\ t, r \in \mathbb{R}$.

b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-0.25t, 1.5t, -2.25t, t),\ t \in \mathbb{R}$.

2. **a)** $\lambda = -1$.

b) $\lambda = 2$ oder $\lambda = \frac{2}{3}$.

c) $\lambda = \sqrt{2}$ oder $\lambda = 7\sqrt{2}$.

d) $(x, y, z) = (-1, -1, 0) + \mu(1, 2, 1),\ \mu \in \mathbb{R}$.

3. **a)** dies folgt aus direkter Berechnung.

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.

c) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \times \vec{w} = (-12, 0, 8), \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

d) dies folgt aus direkter Berechnung.

e) es gilt $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left|\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right|$ ist das Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds.

4. **a)** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $(AB)C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A(BC)$.

c) $\det A = 1, \quad \det C = 4, \quad \det(AC) = 4 = \det A \det C$.

d) Definiert sind nur $AD^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $DA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. **a)** Berechnung liefert, dass $B^T B,\ C^T C,\ D^T D$ orthogonale Matrizen sind.

b) Man überprüft, dass eine Matrix $A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 & \dots & \vec{s}_n \end{pmatrix}$ mit Spaltenvektoren $\vec{s}_1, \cdots, \vec{s}_n$ orthogonal ist, wenn $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$

c) Aus $1 = \det E_n = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2$ folgt $\det A = \pm 1$.

6. **a)** $\det A = 142$.

b) $\det B = -63$.