D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 8

Einführung in die Lineare Algebra

Einsendeschluss: 21. November 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

√ (a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Die Verwendung des Gauss-Algorithmus zeigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

2. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

$\surd$ (c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Die Verwendung des Gauss-Algorithmus zeigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit sieht man, dass ein Parameter frei wählbar ist.

3. Ist der Vektor $\vec{b}$ eine der Spalten der Matrix A, so ist $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) auf jeden Fall unlösbar.

(b) auf jeden Fall eindeutig lösbar.

$\surd$ (c) immer lösbar, aber manchmal nicht eindeutig lösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

(d) manchmal lösbar, manchmal unlösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

$A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\vec{b}$ sich als Linearkombination der Spalten von A darstellen lässt. Ist $\vec{b}$ gleich der j-ten Spalte von A, so ist offenbar

$$\vec{x} = (0 \cdots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1} 0 \cdots 0)^T$$

eine Lösung. Die Lösung ist nur eindeutig, wenn A vollen Zeilenrang hat.

4. Der Winkel zwischen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist

(a) $\frac{\pi}{6}$.

(b) $\frac{\pi}{3}$.

(c) $\frac{2\pi}{3}$.

√ (d) $\frac{5\pi}{6}$.

Wir verwenden $u \cdot v = |u|\,|v| \cos\phi$, wobei ϕ den Winkel zwischen u und v bezeichnet. Dann ist $\cos\phi = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Also ist $\phi = \frac{5\pi}{6}$.

5. Es sei 0_n die $n \times n$-Nullmatrix, E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix, $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

√ (a) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $A + A = 0_n$.

Ist $2A = 0_n$ so gilt $2a = 0$ für alle Einträge a von A. Daraus aber folgt (für reelle wie komplexe Einträge) $a = 0$ für alle Einträge von A, also $A = 0_n$.

(b) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = 0_n$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

(c) E_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = E_n$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

(d) E_n und 0_n sind die einzigen $n \times n$-Matrizen A mit der Eigenschaft $AA = A$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

6. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

(a) 2.

(b) 3.

(c) 4.

√ (d) 6.

Es gilt $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6.$

7. Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A = 0$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) stets unlösbar.

(b) nur lösbar für $\vec{b} = 0$.

(c) lösbar für alle $\vec{b}$, aber nicht unbedingt eindeutig lösbar.

√ (d) lösbar nur für manche $\vec{b}$, aber für kein $\vec{b}$ eindeutig lösbar.

Z.B. hat $A\vec{x} = \vec{b}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist aber unlösbar für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit sind die drei ersten Aussagen falsch. Eine eindeutige Lösung $\vec{x}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ existiert für alle $\vec{b}$ nur, wenn A vollen Rang hat, d.h. $\det A \neq 0$.

8. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = -A.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\det A = 4$.

Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

(b) $\det B = -4$.

Die Determinante von A ist 2 und da $B = -A$ folgt

$$\det B = \det(-A) = (-1)^4 \det A = \det A$$

also muss $\det B = 2$.

√ (c) $\det(AB) = 4$.

Es gilt $\det(AB) = \det A \det B = 2 \cdot 2 = 4$.

(d) $\det(BA) = -4$.

Es gilt $\det(BA) = \det B \det A = 2 \cdot 2 = 4$.

9. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen für reelle $n \times n$-Matrizen A und B sowie alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ **falsch**?

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

siehe Eigenschaften der Determinante aus der Vorlesung.

√ (b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Z.B. ist $\det(E_2 + E_2) = \det(2E_2) = 4 \neq 2$.

(c) $\det(A^T) = \det A$.

siehe Eigenschaften der Determinante aus der Vorlesung.

(d) $\det(AB) = \det B \det A$.

Es gilt $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A$.

10. Für welche der folgenden 3×3-Matrizen A gilt

$$AB = BA = B$$

für alle 3×3-Matrizen B?

√ (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Für keine Matrix, da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt für die $n \times n$-Einheitsmatrix $E_n B = B E_n = B$ für alle $n \times n$-Matrizen B. Daher ist die erste Antwort richtig und die letzte falsch. Die beiden übrigen Matrizen A haben die geforderte Eigenschaft offenbar nicht, wie man leicht durch die Wahl $B = E_3$ nachprüft. So folgt auch, dass E_n im allgemeinen die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft ist.