Dr. Ana Cannas

Serie 9: Matrixinvertierung und Untervektorräume

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 9 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 24./26. November.

1. **a)** Berechnen Sie die Inversen der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $A^{-1}A$ und AA^{-1} berechnen.

d) Bestimmen Sie die Lösung $\vec{x}$ des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$.

2. **a)** Finden Sie alle Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc = 1$ und $A^{-1} = A$.

b) Für welche Werte der Konstanten a, b und c ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

c) Betrachten Sie die obere Dreiecksmatrix (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

und beantworten Sie folgende Fragen.

(i) Für welche Werte von a, b, c, d, e und f ist A invertierbar?

Bitte wenden!

(ii) Allgemeiner, wann ist eine obere Dreiecksmatrix von beliebiger Dimension invertierbar?

(iii) Wenn eine obere Dreiecksmatrix invertierbar ist, ist dann ihr Inverses auch eine obere Dreiecksmatrix? Experimentieren Sie mit (2×2)- und (3×3)-Matrizen.

(iv) Wann ist eine **untere** Dreiecksmatrix invertierbar?

3. Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen W einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ darstellen.

a)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 1 \right\}$$

b)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \leq y \leq z \right\}$$

c)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix} \mid x, y, z \text{ beliebige Konstanten} \right\}$$

4. Bestimmen sie den Nullraum jeder der folgenden Matrizen.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Bestimmen Sie ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

a)
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

b)
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

e)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

f)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

6. **a)** Bestimmen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Werte der Konstanten k bilden die unteren Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}.$$

7. Sei V ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren das **orthogonale Komplement** $V^\perp$ von V als die Menge derjenigen Vektoren $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, die senkrecht auf alle Vektoren in V stehen; das heisst

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0, \text{ für alle} \vec{v} \text{ in } V.$$

a) Zeigen Sie, dass $V^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Betrachten Sie die Gerade L aufgespannt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

Finden Sie eine Basis von $L^\perp$.

Bitte wenden!

Die Lösungen sind

1. a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$,
$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) direkte Rechnung.

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. a) $A = \pm E_2$.

b) Diese Matrix ist nie invertierbar.

c) (i) Falls $a, d, f \neq 0$.

(ii) Wie in (i) falls alle Diagonaleinträge $\neq 0$.

(iii) Ja, das folgt aus der Betrachtung des Algorithmus zur Ermittlung der Inversen.

(iv) Wie in (ii) falls alle Diagonaleinträge $\neq 0$.

3. a) kein Unterraum.

b) kein Unterraum.

c) ist ein Unterraum.

4. a) $\{(t,t,t) |\ t \in \mathbb{R}\}$.

b) $\{(0,0,0)\}$.

c) $\{(-3t,t,t) |\ t \in \mathbb{R}\}$.

d) $\{(0,0,0)\}$.

5. a) linear unabhängig.

b) linear abhängig.

c) linear abhängig.

d) linear abhängig.

e) linear unabhängig.

f) linear abhängig.

6. a) Gauss-Algorithmus liefert, dass diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

b) $k \neq 29$.

7. a) dies folgt aus direktem Überprüfen der Definition.

b) z.B. bilden die Vektoren $(-2,1,0)$, $(-3,0,1)$ eine Basis von $L^{\perp}$.