MC-Serie 9:
Matrixinvertierung und Untervektorräume

Einsendeschluss: 28. November 2014

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche ist die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}?$$

(a) $A^{-1} = \dfrac{1}{\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$

√ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta}\begin{pmatrix} \sin\vartheta & -\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}.$

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta & -\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}.$

Wir verwenden die Formel für die inverse Matrix von 2×2 Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{dann ist} \quad M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

2. Sei A^{-1} die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ inverse Matrix. Die Summe der Spalten von A^{-1} ist

(a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

√ (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Gauss-Algorithmus zur Ermittlung der Inversen liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist die Summe der Spalten gleich

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Welche Menge ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x, y, z)| \; x + y + z = 1\}$.

Der Nullvektor $(0, 0, 0)$ ist nicht enthalten. Diese Menge ist zwar eine Ebene, bloss aber nicht durch den Ursprung.

(b) $\{(x, y, z)| \; x^2 = y^2\}$.

Dies ist keine lineare Bedingung und so sind beliebeige Linearkombinationen von Vektoren nicht mehr in der Menge enthalten, z.B. sind $(1, 1, 0)$ und $(1, -1, 0)$ in der Menge enhalten, jedoch die Summe $(1, 0, 0)$ nicht ($1^2 \neq 0^2$). Diese Menge ist die Vereinigung von den Ebenen $x = y$ und $x = -y$.

√ (c) $\{(x, y, z)| \; x = y = z\}$.

Hier handelt es sich um eine lineare Bedingung, insbesondere handelt es sich um die Diagonale in $\mathbb{R}^3$, die Menge aller Vektoren von der Form $(x, y, z) = (t, t, t), \; t \in \mathbb{R}$, und diese bildet einen Unterraum. Man überprüft leicht, dass sich sowohl der Nullvektor als auch Linearkombinationen von Elementen aus der Menge in der Menge befinden.

(d) $\{(x, y, z)| \; x = y \text{ oder } x = z\}$.

Man überprüft leicht, dass zwar die Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(1, 0, 1)$ in der Menge sind, jedoch die Summe $(2, 1, 1)$ nicht.

4. Welcher Vektor ist eine Linearkombination von

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}?$$

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\checkmark$ (d) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Man üperprüft, dass

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

Um zu zeigen, dass die übrigen Vektoren keine Linearkombinationen der angegebenen Vektoren sind, überprüft man, z.B für den Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, dass die folgende Gleichung keine Lösung besitzt

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

In dem Fall, liefert der Gaussalgorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 1\\2 & 5 & 1\\3 & 6 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 1\\0 & -3 & -1\\0 & -6 & -3\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 1\\0 & -3 & -1\\0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

also sind die Gleichungen für die einzelnen Koordinaten inkonsistent.

5. Welche der folgenden Aussagen bedeutet die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ eines Unterraumes V?

(a) Wenn $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, dann $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$.

(b) Es gibt $c_1, c_2, \cdots, c_n$ nicht alle Null mit $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$.

(c) $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ für alle $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$.

√ (d) $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$, nur wenn $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Dies folgt aus der Definition.

6. Welche ist eine Liste von linear unabhängigen Vektoren?

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Es ist $2 \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, also sind die beiden Vektoren linear abhängig.

√ (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$.

Man überprüft, dass die beiden Vektoren nicht kollinear sind und daher linear unabhängig.

(c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Die ersten beiden Vektoren sind zwar nicht kollinear, jedoch ist der Nullvektor nie linear unabhängig von anderen Vektoren, da für beliebige Vektoren $\vec{v}$ gilt: $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

(d) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Man überprüft, dass z.B. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$. Also sind die drei Vektoren linear abhängig. Wenn man eine solche Gleichung nicht direkt findet, kann man den Kern der Matrix $\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\2 & 5 & 1\\3 & 6 & 1\end{pmatrix}$ untersuchen. Ein nicht trivialer Vektor (c_1, c_2, c_3) im Kern entspricht einer nicht trivialen Kombination $c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

7. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind nie linear unabhängig.

Da $\mathbb{R}^3$ ein drei-dimensionaler Raum ist, können nur höchstens drei Vektoren linear unabhängig sein.

(b) Drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$ können linear unabhängig sein oder nicht.

Z.B. sind $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ drei linear unabhängige Vektoren und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

√ (c) Vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind immer ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$.

Diese vier Vektoren können linear abhängig sein und dann nur einen strikten Unterraum erzeugen, z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

(d) Drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$ sind nie ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^4$.

Da $\mathbb{R}^4$ vier-dimensional ist muss ein Erzeugendensystem mindestens aus 4 Vektoren bestehen.

8. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Die Lösungsmenge hat Dimension gleich

(a) 0.

(b) 1.

√ (c) 2.

(d) 3.

Das Gauss-Verfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb gibt es zwei freie Parameter (z.B. $x_3 = t,\ x_4 = u$) und ist die Dimension der Lösungsmenge gleich 2. Man kann auch eine Basis angeben: die Lösungen sind die Vektoren der Form

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t - u, 2t, t, u) = t\,(1, 2, 1, 0) + u\,(-1, 0, 0, 1),\ \ u, t \in \mathbb{R},$$

deshalb ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis der Lösungsmenge.

9. Der Nullraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Dimension gleich

(a) 0.

√ (b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

Das Gauss-Verfahren liefert eine Stufenformmatrix mit zwei führenden Einsen (d.h. zwei Zeilen die nicht Null sind), deshalb gibt es $3-2 = 1$ freien Parameter.

10. Der Spaltenraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Dimension gleich

(a) 0.

(b) 1.

√ (c) 2.

(d) 3.

Man sieht, dass die drei Spalten linear abhängig sind (d.h. der Kern dieser Matrix ist nicht trivial), aber z.B. sind die ersten zwei Spalten nicht kollinear.