ETH Zürich HS 2014
RW, D-MATL, D-MAVT
Prof. Marloes Maathuis

Koordinator
Lukas Gonon

Stochastik
Serie 10

1. Unterhalb einer Kläranlage wurden 16 unabhängige Wasserproben aus einem Fluss entnommen und jeweils deren Ammoniumkonzentration X_i (in μgNH_4-N/l) mit einem Messgerät bestimmt. Der Mittelwert der Proben ergab $\overline{x} = 204.2$.

Wir wollen nun wissen, ob mit diesem Experiment eine Überschreitung des Grenzwerts von 200 μgNH_4-N/l nachgewiesen werden kann (auf dem 5% Niveau).

a) Nimm an, die Standardabweichung der Messungen sei im voraus aufgrund früherer Studien bekannt. Sie betrage 10 μgNH_4-N/l.

Führe unter dieser Annahme einen z-Test durch, um zu überprüfen, ob eine Grenzwertüberschreitung nachgewiesen werden kann.

Gib die Modellannahmen, H_0, H_A, den Verwerfungsbereich, den Wert der Teststatistik und das Testergebnis explizit an.

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mit 16 unabhängigen Wasserproben eine Grenzwertüberschreitung nachweisen kann, wenn die wahre Ammoniumkonzentration tatsächlich über dem Grenzwert und zwar bei 205 μgNH_4-N/l liegt? **Bemerkung:** Bei der gesuchten Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die Macht des Tests am Wert 205.

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mit 16 unabhängigen Wasserproben fälschlicherweise eine Grenzwertüberschreitung nachweist, obwohl die wahre Ammoniumkonzentration bei 200 μgNH_4-N/l liegt und den Grenzwert somit genau einhält?

2. In einem Sägewerk wird das Schnittholz einer bestimmten Sortierklasse einer Qualitätskontrolle unterzogen. Pro Produktionstag wird eine Stichprobe mit zehn Brettern entnommen und jedes Brett auf seine Steifigkeit getestet. Basierend auf Erfahrung kann angenommen werden, dass die Steifigkeit eines Brettes normalverteilt ist mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 1430$ MPa. Qualitätsschwankungen äussern sich nur in Form von Schwankungen des Mittelwertes.

a) Leite die Formel des 95% Vertrauensintervalls für μ nach 15 Produktionstagen her.

b) Berechne aus a) das Vertrauensintervall für einen beobachteten Stichprobenmitterwert von $\overline{x} = 11000$ MPa (nach 15 Produktionstagen).

c) Wieviele Stichproben wären nötig, damit die Breite des Vertrauensintervalls kleiner als 200 ist?

3. Die Anreicherung einer Legierung mit einem Metall soll den Volumenausdehnungskoeffizienten, der bei der Standardlegierung (ohne Anreicherung) 1.0085 beträgt, reduzieren. Um diese Hypothese nachzuprüfen, wurde der Koeffizient an 12 Proben der neuen Legierung bei gleicher Temperaturänderung gemessen, mit folgenden Ergebnissen:

1.00781	1.00646	1.00801	1.00833	1.00738	1.00687
1.00783	1.00936	1.00564	1.00543	1.00794	1.01060,

Bitte wenden!

die zugehörigen empirischen Werte sind $\overline{x} = 1.00764$ und $s = 0.00146$, außerdem nehmen wir an dass diese Daten normalverteilt sind.

a) Konstruiere das 99%-Vertrauensintervall für den Parameter μ.

b) Lässt sich auf dem Niveau von 5% tatsächlich nachweisen, dass der Volumenausdehnungskoeffizient der neuen Legierung kleiner ist? Formuliere dazu geeignete Hypothesen, gib an ob der Test ein- oder zweiseitig ist, und führe den Test durch.

c) Gib das kleinste Niveau an, bei dem der Test aus b) die Nullhypothese (gerade noch) verwirft. Wie heisst dieses kritische Niveau?

Wir idealisieren nun die Situation und nehmen an, dass $\sigma = 0.0014$ bekannt ist.

d) Bestimme den Verwerfungsbereich des analogen Tests aus b). Wie lautet nun die Teststatistik und wie entscheidet dieser Test?

e) Berechne die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers 2. Art für den in d) bestimmten Test, wenn der wahre Wert $\mu = 1.008$ bzw. $\mu = 1.007$ ist.

f) Wie groß muss der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit das Vertrauensintervall zum 5% Niveau schmäler als 0.0002 ist? Welcher empirisch gemessene Mittelwert würde dann schon zum Verwerfen der Nullhypothese führen?

4. Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung von einem halben Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

20.71	19.76	20.56	21.39	21.00	19.67	20.92	20.31	20.39	20.72

Aus diesen Daten ergibt sich $\overline{x}_{10} = 20.543$.

a) Nehmen Sie an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind, und führen Sie damit einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist.

b) Welches ist das kleinste Niveau, auf dem der Test die Nullhypothese noch verwirft (d.h. der P-Wert)?

Abgabe: Donnerstag 27. November