ETH Zürich HS 2014
RW, D-MATL, D-MAVT
Prof. Marloes Maathuis

Koordinator
Lukas Gonon

Stochastik
Serie 3

1. **a)** Sei X eine diskrete Zufallsvariable welche nur die Werte $W = \{1, \pi, 7, 8.6, 11\}$ annimmt. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

$$P[X = 1] = \frac{1}{16} \quad P[X = \pi] = \frac{3}{8} \quad P[X = 7] = \frac{1}{8} \quad P[X = 8.6] = \frac{1}{4}.$$

(i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P[X = 11]$?

(ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen ganzzahligen Wert annimmt?

(iii) Berechne den Erwartungswert $E[X]$.

(iv) Berechne die Standardabweichung σ_X.

(v) Berechne den Erwartungswert $E[\ln X]$.

b) Es seien $X \sim \text{Pois}\,(20)$ und $Y = X + 5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe.

(i) $Y \sim \text{Pois}\,(25)$

(ii) $\text{Var}(Y) = 20$

(iii) $\mathbb{E}[X] = 25$

c) Es sei $X \sim \text{Bin}(10, 1/3)$, p die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und F die kumulative Verteilungsfunktion von X.

(i) Berechne $p(1)$, $F(1.5)$ und $F(2)$.

(ii) Ist F stetig? Begründe.

2. Die Zufallsvariable, die die Anzahl eingehender Telefonanrufe in einer Telefonzentrale innerhalb von 10 Minuten beschreibt, nennen wir X. Sie folge einer Poissonverteilung mit Erwartungswert $\lambda = 2$, d.h. $X \sim \text{Pois}\,(\lambda)$.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer bestimmten 10-Minuten-Periode keinen einzigen Anruf gibt?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht mehr als drei Telefonanrufe in einer bestimmten 10-Minuten-Periode gibt?

Bitte wenden!

c) Die (sehr kleine) Telefonzentrale ist überlastet, wenn es in einer bestimmten 10-Minuten-Periode mehr als drei Telefonanrufe gibt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie in einer bestimmten 10-Minuten-Periode überlastet ist?

d) Wir nehmen an, dass die Anzahl Anrufe in einer 10-Minuten-Periode von der Anzahl Anrufe in einer anderen 10-Minuten-Periode unabhängig ist. Die Zufallsvariable, welche die Anzahl Anrufe in einer Stunde beschreibt, bezeichnen wir mit Y. Welcher Verteilung folgt Y?

3. Bei einer Untersuchung werden Wasserproben (10ml) auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte (5ml) der Probe zu einer Sammelprobe (50ml) zusammenzumischen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzelproben beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?

b) Sei die Zufallsvariable Y die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann Y annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

c) Wieviele Analysen werden "im Durchschnitt" für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $E(Y)$)? Wieviele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben "im Durchschnitt" eingespart?

4. Anja und Beatrice werfen abwechselnd einen fairen Würfel. Das Spiel gewinnt wer zuerst eine Sechs würfelt. Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spielerinnen wenn Anja mit dem Würfeln beginnt.

Tipp: Sei X die Nummer des Wurfes, bei dem die erste Sechs erscheint. Bei welchen Werten für X gewinnt Anja? Benutze für die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja die geometrische Reihe: für $0 \leq q < 1$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$.

5. Für eine externe Benutzergruppe, der auch Franz angehört, stehen an der ETH vier Rechner zur Verfügung, wobei jedem Benutzer beim Einloggen jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ unabhängig von den anderen einer der Rechner zugeteilt wird. Es kann also durchaus vorkommen, dass mehrere Leute auf dem gleichen Rechner arbeiten.

Siehe nächstes Blatt!

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person auf dem gleichen Rechner arbeitet wie Franz, wenn ausser ihm genau 10 Personen eingeloggt sind?

b) Wieviele Leute dürfen sich ausser Franz noch einloggen, damit er mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ allein auf einem Rechner arbeitet?

c) (**Zusatz**) Wir nehmen nun an, dass jeder Rechner unabhängig von den anderen nur mit Wahrscheinlichkeit 0.9 funktioniert, wobei die Benutzer analog wie vorher auf die funktionierenden Rechner "verteilt" werden. Gegeben, dass ausser Franz drei Leute eingeloggt sind und genau zwei davon auf dem gleichen Rechner arbeiten wie er, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle Rechner funktionieren?

Tipp: Sei X die Anzahl funktionierender Rechner und S_3 die Anzahl der Personen, die ausser Franz auf seinem Rechner arbeiten. Bestimme für $k = 2, 3, 4$ die W'keiten $P(S_3 = 2|X = k)$ aus der Annahme wie die Benutzer auf die Rechner 'verteilt' werden und benutze diese W'keiten um mit dem Satz der totale Wahrscheinlichkeit $P(S_3 = 2)$ zu berechnen. Mit dem Satz von Bayes erhält man dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Abgabe: Donnerstag 9. Oktober in den Fächern im HG E 65 oder per e-mail an den/die Assistenten/in (bis 18 Uhr).
Präsenz: Montag, 18-19 Uhr im HG E 33.1.
Homepage: `www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/stochastik_MAVT`