

## Stochastik

### Serie 4

1. Die monatlichen Aufwendungen  $X$  [CHF] für den Wasserverbrauch eines 2-Personenhaushalts seien durch eine Zufallsvariable mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} cx(15 - \frac{x}{4}) & \text{falls } 0 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Welchen Wert muss  $c$  annehmen?
  - b) Gib die Verteilungsfunktion  $F$  der Zufallsvariablen  $X$  an.
  - c) Welcher Wert wird nur mit 10 % Wahrscheinlichkeit überschritten?
  - d) Wie hoch sind die erwarteten monatlichen Aufwendungen für den Wasserverbrauch eines 2-Personenhaushalts?
  - e) Berechne die Standardabweichung von  $X$ .
  - f) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die monatlichen Aufwendungen mehr als 36 CHF betragen.
2. Der kleine Diego darf seine Eltern zu einer Party begleiten. Bei solchen Gelegenheiten möchte Diego jeweils so lange wie möglich wach bleiben. Sein Durchhaltevermögen (wach bleiben in Stunden ab Partybeginn um 20 Uhr) werde durch die Zufallsvariable  $T$  mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 - \exp(-t/3) & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

beschrieben.

- a) Prüfe nach, dass es sich bei  $F$  wirklich um eine Verteilungsfunktion handelt.
- b) Hat  $F$  eine Dichte? Wenn ja, wie lautet diese?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diego vor Mitternacht einschläft?

**Bitte wenden!**

- d) Um welche Uhrzeit beträgt die Wahrscheinlichkeit genau 50%, dass Diego bereits eingeschlafen ist (*bei der gesuchten Uhrzeit handelt es sich um den Median der Zufallsvariable  $T$* )?
3. Aufgrund langjähriger Untersuchungen ist bekannt, dass der Bleigehalt  $X$  in einer Bodenprobe annähernd normalverteilt ist. Ausserdem weiss man, dass der Erwartungswert 32 ppb beträgt und dass die Standardabweichung 6 ppb beträgt.
- a) Mache eine Skizze der Dichte von  $X$  und zeichne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe zwischen 26 und 38 ppb Blei enthält, in die Skizze ein.
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 40 ppb Schwermetall enthält?  
Hinweis: Gehe zur standardisierten Zufallsvariablen  $Z$  über und benutze die Tabelle der Standardnormalverteilung.
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 27 ppb Schwermetall enthält?
- d) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% unterschritten? Das heisst, bestimme dasjenige  $c$ , so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Bleigehalt kleiner oder gleich  $c$  ist, genau 97.5% beträgt.
- e) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterschritten?
- f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die in Aufgabe a) eingezeichnet wurde?
4. Ein Zufallsgenerator für die uniforme Verteilung auf  $[0, 1]$  liefert die folgenden fünf Werte:

0.353            0.101            0.455            0.918            0.285.

Generiere daraus fünf Werte einer

- a) Uni  $[-4, 25]$ -verteilten Zufallsvariablen,  
 b)  $\mathcal{N}(-2, 5^2)$ -verteilten Zufallsvariablen,  
 c) Exp(2)-verteilten Zufallsvariablen.

**Siehe nächstes Blatt!**

5. Ein System bestehe aus 2 Maschinen, welche voneinander unabhängige Lebensdauern  $T_1$  und  $T_2$  besitzen mit Dichten (Die Maßeinheit von  $t$  sei Stunden)

$$f_{T_1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1000} \exp(-\frac{1}{1000} t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_{T_2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1500} \exp(-\frac{1}{1500} t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach 200 Stunden beide Maschinen noch funktionieren.
- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach 200 Stunden noch mindestens eine Maschine funktioniert.

**Abgabe:** Donnerstag 16. Oktober in den Fächern im HG E 65 oder per e-mail an den/die Assistenten/in (bis 18 Uhr).

**Präsenz:** Montag, 18-19 Uhr im HG E 33.1.

**Homepage:** [www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/stochastik\\_MAVT](http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/stochastik_MAVT)