ETH Zürich HS 2014
RW, D-MATL, D-MAVT
Prof. Marloes Maathuis

Koordinator
Lukas Gonon

Stochastik
Serie 6

1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Die gemeinsame Dichte von X und Y ist

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + 16xy + 6y^2, & (x,y) \in D = [0, \frac{1}{4}] \times [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Weise nach, dass f auf $\mathbb{R}^2$ tatsächlich eine Dichte ist.

b) Berechne die Erwartungswerte $E[X]$ und $E[Y]$.

c) Berechne die Kovarianz von X und Y.

d) Sind X und Y unabhängig? Begründung?

e) Berechne den bedingten Erwartungswert $E[Y|X = \frac{1}{8}]$.

2. In einer Studie an Ehepaaren einer hessischen Landbevölkerung wurde untersucht, ob eine Beziehung zwischen Körperbau und Gattenwahl besteht. Es wurden bei Ehegatten die Körperbautypen *1 (leptosom, schmächtig)*, *2 (athletisch)* und *3 (pyknisch, fettleibig)* unterschieden. Die unten stehende Tabelle zeigt die entsprechende gemeinsame Verteilung von X (Körperbau Mann) und Y (Körperbau Frau).

Körperbautyp	Körperbautyp der Ehefrau		
des Ehemannes	1 leptosom	2 athletisch	3 pyknisch
1 leptosom	11.6%	4.5%	7.6%
2 athletisch	7.1%	46.0%	7.6%
3 pyknisch	4.5%	a	9.8%

a) Bestimme den fehlenden Wert a.

b) Berechne die Randverteilungen, d.h. die Verteilung von X und die Verteilung von Y.

c) Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit $P[X \leq 2|Y \leq 2]$.

Bitte wenden!

d) Berechne die gemeinsame Verteilung von X und Y unter Annahme der Unabhängigkeit. Benutze dazu die Randverteilungen aus **b)** und vergleiche dann die Werte mit obiger Tabelle.

3. Es seien X und Y unabhängige, $\mathcal{N}(0,1)$ - verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die Zufallsvariable Z, welche definiert ist als

$$Z := \operatorname{sign}(Y) \cdot X = \begin{cases} X & \text{falls } Y > 0, \\ -X & \text{falls } Y \leq 0. \end{cases}$$

a) Bestimme die Verteilung von Z.

b) Berechne die Korrelation von X und Z.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P[X + Z = 0]$.

d) Sind X und Z unabhängig? Begründe deine Antwort durch ein präzises mathematisches Argument.

4. Seien X und Y die Lebensdauer zweier Maschinen, "Maschine 1" bzw. "Maschine 2", in Monaten. Die beiden Variablen sind unabhängig und exponentialverteilt:

$$X \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1) \text{ mit } \lambda_1 = \frac{1}{10}, \quad Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda_2) \text{ mit } \lambda_2 = \frac{1}{15}$$

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 1 länger funktioniert als Maschine 2?

b) Wenn man weiss, dass Maschine 1 nach 4 Monaten kaputt war, was ist dann die erwartete Lebensdauer der Maschine 2?

5. Die Randdichten eines zwei-dimensionalen Zufallsvektors $Z = (X, Y)$ sind wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{andere} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2y - y^2) & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{andere} \end{cases}$$

Der Korrelationskoeffizient $\varrho_{X,Y}$ zwischen X und Y entspricht $\varrho_{X,Y} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$.

b) Berechne die Kovarianz $\operatorname{Cov}(6X, 4Y)$.

c) Berechne die Varianz von $6X - 4Y + 2$.

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$.

Abgabe: Donnerstag 30. Oktober