Stochastik

Serie 9

1. Die Zeitschrift “Gemüsetest” testet den Wahrheitsgehalt der folgenden Werbeaussagen:

1. Gemüsehändler Hase behauptet seine Karotten seien im Durchschnitt mindestens $30cm$ lang.
2. Gleichzeitig preist er seine Kartoffeln der Sorte “Pellworm” als ideale Pellkartoffeln an. Sie seien mit einem durchschnittlichen Gewicht von $50g$ weder zu dick noch zu dünn.
3. Konservenfabrikant Hamster wirbt für seine extrazarten jungen Erbsen mit der Garantie, die durchschnittliche Dicke der jungen Erbsen betrage höchstens $3mm$.
4. Er behauptet auch, dass der Anteil von holzigen Spargeln in seinen Konserven unter $0,3\%$ liege.
5. Ausserdem lobt er die ausgewogene Mischung seiner “Erbsen mit Karotten”, die genau 40% zu 60% Gewichtsanteil betrage.

a) Gib jeweils an, ob ein linksseitiger, ein rechtsseitiger oder ein zweiseitiger Test nötig ist um den Wahrheitsgehalt[1] der Aussagen zu testen. Auf welchen Parameter bezüglich welcher Zufallsvariable wird getestet? Stelle jeweils Nullhypothese und Gegenhypothese (Alternativhypothese) auf.

(Der Test selber muss (und kann mangels fehlender Angaben) nicht durchgeführt werden.)

b) Die Karotten von Hase sind tatsächlich durchschnittlich 30 cm lang. In ihrem Test kommt die Zeitschrift jedoch zu dem Ergebnis, dass die Werbeaussage falsch sei. Was ist passiert? (Fehler 1.Art oder 2.Art?)

c) Der tatsächliche Anteil an holzigen Spargeln liegt bei 2%, trotzdem akzeptiert die Zeitschrift nach ihrem Test die Aussage von Fabrikant Hamster. Warum? (Fehler 1.Art oder 2.Art?)

2. Lisa hat eine Maschine gebaut, die das Abwerfen einer Münze filmt und anhand einer komplizierten Videoanalyse das Ergebnis (“Kopf” oder “Zahl”) vorhersagt. Für einen Testlauf wirft sie 20 mal eine Münze und lässt die Maschine den Ausgang vorhersagen. In 13 der 20 Würfe sagt die Maschine das richtige Ergebnis voraus.
Sie glaubt aber, dass dies reiner Zufall ist und die Vorhersagen der Maschine im Schnitt nur in der Hälfte der Fälle zutreffen. Ihre Freundin Laura hält sie für eine Pessimistin und möchte in einem statistischen Test prüfen, dass die Maschine im Schnitt bessere Vorhersagen macht.

Sei X die Anzahl der von der Maschine korrekt geratenen Ergebnisse (aus $n = 20$ Versuchen). Zur Modellierung von X verwenden wir eine Binomialverteilung mit Parametern $n = 20$ und Erfolgswahrscheinlichkeit p, d.h. $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $n = 20$.

[1] Genauer geht es darum die Aussagen zu widerlegen, gelingt dies nicht bleibt uns wohl nichts anders übrig als die Aussage zu akzeptieren, womit noch lange nicht belegt ist, dass sie wahr sind.

Bitte wenden!

a) Geben Sie die Null- und Alternativhypothese für den statistischen Test an. Begründen Sie Ihre Wahl.

b) Geben Sie die Verteilung unter H_0 an. Wird die Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau verworfen?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Nullhypothese verworfen wird, falls die Vorhersagewahrscheinlichkeit in Tat und Wahrheit $p = 0.75$ ist?

3. Einer Gruppe von 20 Tennisspielern mittleren Niveaus werden je zwei Tennisschläger zum Testen ausgehändigt. Einer der Schläger ist jeweils mit einer Nylon-Saite bespannt, der andere mit einer synthetischen Darm-Saite. Nach einigen Wochen Testzeit wird jeder Spieler gefragt, ob er Nylon- oder Darm-Saiten bevorzugt. Es sei p der Anteil aller Tennisspieler mittleren Niveaus, die Darm-Saiten bevorzugen und X sei die Anzahl der Spieler unter den 20 Testspielern die Darm-Saiten bevorzugen. Da Darm-Saiten teurer sind als Nylon-Saiten, betrachten wir die Nullhypothese, dass höchstens die Hälfte der Spieler Darm-Saiten bevorzugt. Wir vereinfachen dies zu $H_0 : p = 0.5$ und werden H_0 nur ablehnen, falls der Versuchsausgang eindeutig Darm-Saiten bevorzugt.

a) Welcher der Verwerfungsbereiche $\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ oder $\{0, 1, 2, 3, 17, 18, 19, 20\}$ ist am ehesten angemessen und warum sind die zwei anderen es nicht?

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art für den in **a)** gewählten Verwerfungsbereich? Erhält man mit diesem Verwerfungsbereich einen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$? Kann man diesen Verwerfungsbereich vergrößern ohne das Niveau $\alpha = 0.05$ zu verlieren?

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art für den in **a)** gewählten Verwerfungsbereich unter den Annahmen $p = 0.6$ sowie $p = 0.8$.

4. Bei einer Qualitätskontrolle werden 300 Stück eines Produktes ausgewählt und geprüft. 189 Stück erfüllen die Anforderungen für ein Produkt erster Qualität.

a) Laut Hersteller ist die Wahrscheinlichkeit p für ein Produkt erster Qualität gleich $2/3$ (oder sogar grösser). Basierend auf obiger Beobachtung sind Sie etwas skeptisch. Führen Sie unter geeigneten Annahmen einen statistischen Test mit Signifikanznineau 5% durch um dies zu überprüfen.

b) Angenommen, p ist in Wirklichkeit gleich 0.6, wie gross ist dann der Fehler zweiter Art des in **a)** ausgeführten Tests?

Hinweis: Sei X die Anzahl geprüfter Stücke, die die Anforderungen an ein Produkt erster Qualität erfüllen. Verwende in a) und b) jeweils den zentralen Grenzwertsatz um $P_p(X \leq k)$ zu approximieren und das gesuchte Quantil bzw. die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Abgabe: Donnerstag 20. November