Wahr/Falsch/Multiple Choice Algebra

Peter Zenz

October 26, 2015

1. Ein Homomorphismus $\phi : R \to S$ (mit Ringen R, S) ist eine Abbildung mit
   - $\phi(0_R) = 0_S$
   - $\phi(1_R) = 1_S$
   - $\forall x, y \in R : \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
   - $\exists x \forall y \in R : \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
   - $\forall x, y \in R : \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
   - $\forall x \in R\ \forall n \in \mathbb{Z} :\ \phi(nx) = n\phi(x)$

   Kreuze nur die notwendigen Bedingungen an, (so wenig wie möglich, so viel wie nötig).

2. Es gibt Homomorphismen die nicht surjektiv sind.

3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bildet eine "Kette" von Unterringen.

4. - Der Durchschnitt einer nichtleeren Kollektion von Unterringen von R ist ein Unterring.
   - Die Vereinigung einer nichtleeren Kollektion von Unterringen von R ist ein Unterring.
   - Keine der beiden obigen Aussagen stimmt.

5. - Ein Ring ohne Nullteiler ist ein Integritätsbereich
   - Jeder Körper ist ein Integritätsbereich
   - Wenn R ein Integritätsbereich ist, dann ist R[X] auch ein Integritätsbereich
   - Es gibt Unterringe von Körpern, die keine Integritätsbereiche sind.

6. Faktorringe sind Ringe, die faktoriell sind.

7. Jeder Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ induziert einen Isomorphismus zwischen $R/Ker\phi$ und S.

8. Primideale von R sind $\mathbf{p} \subset R$ mit
   $\forall x, y \in R : xy \in \mathbf{p} \to (x \in \mathbf{p}$ oder $y \in \mathbf{p})$

9. Jedes maximale Ideal ist ein Primideal, aber nicht jedes Primideal ist ein maximales Ideal.

10. aus der korrekten Aussage von (9) kann man folgern, dass
    Jeder Körper ist ein Integritätsbereich, aber nicht jeder Integritätsbereich ist ein Körper

11. Jedes Ideal $\mathbf{a} \subset R$ ist ein Unterring von R.

12. Das Ideal $(3, 7)$ ist ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$ da es von Primzahlen erzeugt wird.

13. $a|b$ genau dann wenn $(a) \subset (b)$

14. Ein Element in einem Ring R heisst prim, wenn es durch kein anderes Element im Ring teilbar ist.

15. Schreibe ein Element und den dazugehörigen Ring auf (bzw. wann ist das nicht möglich), so dass das Element
    - irreduzibel, aber nicht prim ist
    - prim aber nicht irreduzibel ist
    - prim und irreduzibel ist

16. Ein Ring in dem jedes Ideal von einem Element erzeugt wird, also ein Hauptideal ist, nennt man Hauptidealring.

17. Ein Hauptidealring ist faktoriell.

18. Nenne einen faktoriellen Ring der kein Hauptidealring ist.

19. - Jeder Hauptidealring ist euklidisch
    - Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring

20. Der Inhalt des Polynoms $4X^2 + 16X + 8$ ist leer.

21. Wenn $X^2 + 3X + 7$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, dann ist es er auch irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

22. Mit dem Eisensteinkriterium ist $4X^2 + 2X + 6$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

23. $p(X) = X^5 + 3X^2 + 6$ ist reduzibel über $\mathbb{F}_3 \Rightarrow p(X)$ ist reduzibel über $\mathbb{Z}[X]$.

24. Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times$ ist nur $\{+1, -1\}$ da $\sqrt{3}$ irrational ist.

25. Mit den üblichen Rechenoperation, wobei K ein Körper ist, welche der folgenden Ringe ist auch ein Körper:
    - K
    - K[X]
    - K[[X]]
    - K(X)
    - K((X))

26. Jeder unendliche Integritätsbereich ist insbesondere ein Körper.

27.
- Die Normabbildung sowie die universelle Eigenschaft sind unnütze Konzepte, die in der Algebra nie angewendet werden.
- Die Normabbildung ist nützlich unter anderem, um die Irreduzibilität von Elementen zu zeigen.
- Die Universelle Eigenschaft ist zwar sehr abstrakt aber nützlich, um etwa die Existenz von Homomorphismen und Isomorphismen zu zeigen.

28.
- Der Ring $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ ist ein Körper.
- Der Ring $\mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X + 1)$ ist ein Körper.

29. Das Polynom $X^{17} + 1.000.000.007$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

30. Diese Fragen haben mir gezeigt:

- Ich habe die Basiskonzepte gut verstanden und bleibe weiterhin dabei mein Algebrawissen auszubauen, die Serien abzugeben, und die Übungsblätter bereits vor der Übungsstunde anzuschauen, weil Agebra so ein schönes und nützliches Fach ist.
- Dass ich noch ein bisschen aufholen muss, weil ich mir oft unsicher war und die Fragen selten verstanden habe, und ich dementsprechend mein Algebrawissen ausbauen möchte, indem ich immer die Serien abgebe, und die Übungsblätter bereits vor der Übungsstunde anschaue, weil Algebra so ein schönes und nützliches Fach ist.
- Dass ich in Algebra bisher viel zu wenig getan habe und dass es unrealistisch ist zu glauben, dass ich den ganzen Stoff im Sommer oder in den Semesterferien aufhole, weswegen ich ab jetzt immer die Serien abgebe, und die Übungsblätter bereits vor der Übungsstunde anschaue, weil Algebra so ein schönes und nützliches Fach ist.
- Mein Assistent ein gemeiner Typ ist, der mich mit blöden Fragen ärgern will, weil er selbst Algebra nicht verstanden hat und diese Fragen nur gemacht hat, weil er selber Algebra lernen möchte, weil Algebra so ein schönes und nützliches Fach ist.