D-MATH Algebra I HS 2015
Prof. Richard Pink

Multiple Choice Quiz

Jede Frage hat mindestens eine richtige Antwort, manchmal mehrere.

1. Eine nichtleere Teilmenge $H \subset G$ einer Gruppe G ist eine Untergruppe genau dann, wenn $\forall h_1, h_2 \in H : \, h_1 h_2^{-1} \in H$.

   Richtig

   Falsch

2. Das Urbild jeder Untergruppe $H' < H$ unter einer Abbildung $G \to H$ ist eine Untergruppe von G.

   Richtig

   Falsch

3. Die Untergruppen einer endlichen Gruppe G stehen in bijektiver Korrespondenz mit den Teilern der Ordnung von G.

   Richtig

   Falsch

4. Für jede Gruppe G und Untergruppe $H < G$ gilt $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

   Richtig

   Falsch

5. Which of the following subgroups of a group G are always characteristic (i.e., preserved by all group automorphisms)?

   a) The subgroup of G generated by all elements of finite order;

   b) $[G, G]$;

   c) $Z(G)$;

6. Welcher der folgenden Gruppen sind abelsch?
   a) Die Quaternionengruppe Q_8.
   b) Die Diedergruppe D_4.
   c) Die Kommutatorgruppe einer Gruppe.
   d) Alle Gruppen der Ordnung p für p prim.
   e) Alle Gruppen der Ordnung p^2 für p prim.
   f) Alle Gruppen der Ordnung p^n für p prim und $n \geqslant 1$.
   g) Die Faktorgruppe G/N wenn N abelsch ist.
   h) Die Faktorgruppe G/N wenn G abelsch ist.
7. Welche der folgenden Gruppenoperationen sind treu?
   (a) $\mathrm{SO}(3)$ auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$
   (b) $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ via ${}^{\alpha}z := e^{i\alpha}z$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$
   (c) Eine Gruppe G operiert auf $Z(G)$ via Konjugation
   (d) Eine Gruppe G operiert auf $[G, G]$ via Konjugation
8. Sei X der Würfel $[0, 1]^3$ in $\mathbb{R}^3$, in dem auf jeder der sechs Seitenflächen die von dem Eckpunkt $(0, 0, 0)$ oder $(1, 1, 1)$ ausgehende Diagonale eingezeichnet ist. Die Gruppe der Drehungen in $\mathrm{SO}(3)$, welche X in sich überführen, ist
   (a) zyklisch der Ordnung 3.
   (b) zyklisch der Ordnung 4.
   (c) isomorph zur D_3.
   (d) isomorph zur D_4.
   (e) isomorph zu A_4.
   (f) isomorph zu S_4.
9. Das Element $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)$ von S_8 hat die Ordnung

   3

   4

   7

   8

   12

   16

10. In S_8 gilt $(1\ 2\ 3)(4\ 2\ 5\ 7)(6\ 2\ 5) =$

    $(1\ 6\ 2\ 3)(5\ 7\ 4)$

    $(1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 5\ 7\ 6\ 2\ 5)$

    $(7\ 4\ 3\ 1\ 2)(5\ 6)$

    $(1\ 7\ 4\ 3\ 2)(5\ 6)$

    $(1\ 2\ 7\ 4\ 3)(5\ 6)$

11. Die Anzahl der Permutationen in S_6 mit ungerader Signatur ist

    0

    60

    120

    360

    720

12. Zwei verschiedene Zykel in S_n kommutieren genau dann, wenn sie disjunkt sind.

    Richtig

    Falsch

13. Die Gruppe S_n wird genau dann von einem n-Zykel und einer Transposition erzeugt, wenn n prim ist.

14. Eine Gruppe ist einfach genau dann, wenn sie ein triviales Zentrum besitzt.

    Richtig

    Falsch

15. Jeder Normalteiler einer einfachen Gruppe ist einfach.

    Richtig

    Falsch

16. Folgende Subnormalreihen sind Kompositionsreihen:

    (a) $G \rhd G \rhd \{1\}$ für eine einfache Gruppe G

    (b) $\mathbb{F}_p^n \rhd \mathbb{F}_p^{n-1} \times \{0\} \rhd \cdots \rhd \mathbb{F}_p \times \{0\}^{n-1} \rhd \{0\}^n$ für eine Primzahl p

    (c) $D_n \rhd C_n \rhd \{1\}$ für beliebiges $n \geqslant 1$

17. Seien H, N Gruppen und H operiere von links auf die Gruppe N. Dann ist $N \rtimes H$ auflösbar,

    (a) falls N auflösbar ist

    (b) falls H auflösbar ist

    (c) genau dann wenn N und H auflösbar sind

    (d) falls N auflösbar und H abelsch ist

18. Jede Gruppe G der Ordnung $2p^n$ für ein $n \geqslant 1$ und eine Primzahl p ist auflösbar.

    Immer richtig.

    Nur richtig für $p = 2$.

    Nur richtig für $p > 2$.

    Für jedes p gibt es Gegenbeispiele.

19. Welche der folgenden Gruppen besitzen eine 3-Sylow-Untergruppe, die zyklisch ist?

    (a) $(\mathbb{Z}/(8\mathbb{Z}))^\times$

    (b) $(\mathbb{Z}/(9\mathbb{Z}))^\times$

    (c) S_6, Hinweis: $exp(S_n) = kgV(2, 3, \ldots, n)$

20. Sei p eine Primzahl, so dass $q := p+2$ auch eine Primzahl ist (ein Primzahlzwilling). Die Anzahl der Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung pq ist

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) $p - 1$

    (e) p

    (e) $q - 1$

    (f) q