D-MATH Algebra I HS 2015
Prof. Richard Pink

Multiple Choice Quiz: Lösungen

Jede Frage hat mindestens eine richtige Antwort, manchmal mehrere.

1. Eine nichtleere Teilmenge $H \subset G$ einer Gruppe G ist eine Untergruppe genau dann, wenn $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 h_2^{-1} \in H$.

   Richtig

   Falsch

   Lösung: Richtig; dies ist äquivalent zur Definition.

2. Das Urbild jeder Untergruppe $H' < H$ unter einer Abbildung $G \to H$ ist eine Untergruppe von G.

   Richtig

   Falsch

   Lösung: Dies gilt, wenn die Abbildung ein Homomorphismus ist; im allgemeinen aber nicht.

3. Die Untergruppen einer endlichen Gruppe G stehen in bijektiver Korrespondenz mit den Teilern der Ordnung von G.

   Richtig

   Falsch

   Lösung: Falsch. Dies stimmt nur für zyklische Gruppen. Für nichtabelsche Gruppen tauchen nicht notwendig alle Teiler der Gruppenordnung als Ordnungen von Untergruppen auf. Für nichtzyklische abelsche Gruppen zwar schon, aber manche mehrfach.

4. Für jede Gruppe G und Untergruppe $H < G$ gilt $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

   Richtig

   Falsch

   Lösung: Jain. Korrekt für endliche Gruppen, aber der Quotient $\frac{|G|}{|H|}$ hat keine Bedeutung wenn G und H unendlich sind. Dagegen gilt immer $|G| = [G : H] \cdot |H|$.

5. Which of the following subgroups of a group G are always characteristic (i.e., preserved by all group automorphisms)?

   a) The subgroup of G generated by all elements of finite order;

   b) $[G, G]$;

   c) $Z(G)$;

   Lösung: All answers are correct. Each subgroup is independent of a choice and therefore characteristic (both in the informal and the formal sense). More precisely:

   a) The image of an element of finite order is an element of finite order;

   b) The image of a commutator is the commutator of the images;

   c) Let $g \in Z(G)$. Then, for each automorphism $\varphi : G \to G$ and each $y \in G$, we can write $y = \varphi(x)$ for some $x \in G$, so that $\varphi(g) \cdot y = \varphi(g) \cdot \varphi(x) = \varphi(gx) = \varphi(xg) = \varphi(x) \cdot \varphi(g) = y \cdot \varphi(g)$.

6. Welcher der folgenden Gruppen sind abelsch?

   a) Die Quaternionengruppe Q_8.

   b) Die Diedergruppe D_4.

   c) Die Kommutatorgruppe einer Gruppe.

   d) Alle Gruppen der Ordnung p für p prim.

   e) Alle Gruppen der Ordnung p^2 für p prim.

   f) Alle Gruppen der Ordnung p^n für p prim und $n \geqslant 1$.

   g) Die Faktorgruppe G/N wenn N abelsch ist.

   h) Die Faktorgruppe G/N wenn G abelsch ist.

   Lösung: d, e, h

7. Welche der folgenden Gruppenoperationen sind treu?

   (a) $\mathrm{SO}(3)$ auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

   (b) $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ via ${}^{\alpha}z := e^{i\alpha}z$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$

   (c) Eine Gruppe G operiert auf $Z(G)$ via Konjugation

   (d) Eine Gruppe G operiert auf $[G, G]$ via Konjugation

   Lösung: Richtig ist nur (a). Gegenbeispiele für (b): 0 und 2π induzieren den selben Automorphismus, (c): Diese Operation ist trivial, (d): z.B. ist G abelsch und nicht-trivial.

8. Sei X der Würfel $[0,1]^3$ in $\mathbb{R}^3$, in dem auf jeder der sechs Seitenflächen die von dem Eckpunkt $(0,0,0)$ oder $(1,1,1)$ ausgehende Diagonale eingezeichnet ist. Die Gruppe der Drehungen in SO(3), welche X in sich überführen, ist

   (a) zyklisch der Ordnung 3.

   (b) zyklisch der Ordnung 4.

   (c) isomorph zur D_3.

   (d) isomorph zur D_4.

   (e) isomorph zu A_4.

   (f) isomorph zu S_4.

   Lösung: (a)

9. Das Element (1 2 3)(4 5 6 7) von S_8 hat die Ordnung

   3

   4

   7

   8

   12

   16

   Lösung: 12

10. In S_8 gilt (1 2 3)(4 2 5 7)(6 2 5) =

    (1 6 2 3)(5 7 4)

    (1 2 3 4 2 5 7 6 2 5)

    (7 4 3 1 2)(5 6)

    (1 7 4 3 2)(5 6)

    (1 2 7 4 3)(5 6)

    Lösung: (7 4 3 1 2)(5 6) und (1 2 7 4 3)(5 6) sind beide korrekt, die anderen nicht.

11. Die Anzahl der Permutationen in S_6 mit ungerader Signatur ist

    0

    60

    120

    360

    720

    Lösung: Die Signatur jeder Permutation ist ± 1 und daher eine ungerade Zahl; also ist die korrekte Antwort $|S_6| = 6! = 720$. Allerdings war das eine Fangfrage, und vermutlich haben Sie gedacht, wir fragten nach der „Anzahl ungerader Permutationen in S_6.“ Diese ist gleich $|S_6| - |A_6| = 6! - \frac{6!}{2} = 720 - 360 = 360$.

12. Zwei verschiedene Zykel in S_n kommutieren genau dann, wenn sie disjunkt sind.

    Richtig

    Falsch

    Lösung: Falsch. Zum Beispiel kommutiert jeder Zykel mit sich selbst oder mit seinem Inversen.

13. Die Gruppe S_n wird genau dann von einem n-Zykel und einer Transposition erzeugt, wenn n prim ist.

    Lösung: Falsch. Die Richtung „$\Leftarrow$“ stimmt, aber S_n wird zum Beispiel auch von dem n-Zykel $(1\ 2\ \ldots\ n)$ und der Transposition $(1\ 2)$ erzeugt.

14. Eine Gruppe ist einfach genau dann, wenn sie ein triviales Zentrum besitzt.

    Richtig

    Falsch

    Lösung: Falsch. Zum Beispiel ist jede zyklische Gruppe von Primzahlordnung einfach und gleich ihrem Zentrum.

15. Jeder Normalteiler einer einfachen Gruppe ist einfach.

    Richtig

    Falsch

    Lösung: Falsch. Die triviale Untergruppe ist normal, aber nicht einfach.

16. Folgende Subnormalreihen sind Kompositionsreihen:

    (a) $G \rhd G \rhd \{1\}$ für eine einfache Gruppe G

    (b) $\mathbb{F}_p^n \rhd \mathbb{F}_p^{n-1} \times \{0\} \rhd \cdots \rhd \mathbb{F}_p \times \{0\}^{n-1} \rhd \{0\}^n$ für eine Primzahl p

    (c) $D_n \rhd C_n \rhd \{1\}$ für beliebiges $n \geqslant 1$

    Lösung: Richtig ist nur (b), da die Subquotienten dort alle die Ordnung p haben. Falsch ist (a), da G/G trivial, also nicht einfach ist. Falsch ist auch (c), da C_n im Allgemeinen nicht einfach ist.

17. Seien H, N Gruppen und H operiere von links auf die Gruppe N. Dann ist $N \rtimes H$ auflösbar,

    (a) falls N auflösbar ist

    (b) falls H auflösbar ist

    (c) genau dann wenn N und H auflösbar sind

    (d) falls N auflösbar und H abelsch ist

    Lösung: Richtig sind (c) und (d), weil $(N \rtimes H)/N \cong H$ ist. Falsch sind (a) und (b) im Allgemeinen, betrachte z.B. das direkte Produkt.

18. Jede Gruppe G der Ordnung $2p^n$ für ein $n \geqslant 1$ und eine Primzahl p ist auflösbar.

    Immer richtig.

    Nur richtig für $p = 2$.

    Nur richtig für $p > 2$.

    Für jedes p gibt es Gegenbeispiele.

    Lösung: Immer richtig. Im Fall $p = 2$ ist G eine p-Gruppe für $p = 2$, also auflösbar. Im Fall $p > 2$ besitzt G eine p-Sylowuntergruppe der Ordnung p^n. Diese hat Index 2, ist also normal mit abelscher Faktorgruppe der Ordnung 2. Als p-Gruppe ist sie andererseits selbst auflösbar. Also ist G auflösbar.

19. Welche der folgenden Gruppen besitzen eine 3-Sylow-Untergruppe, die zyklisch ist?

    (a) $(\mathbb{Z}/(8\mathbb{Z}))^\times$

    (b) $(\mathbb{Z}/(9\mathbb{Z}))^\times$

    (c) S_6, Hinweis: $exp(S_n) = kgV(2, 3, \ldots, n)$

    Lösung: (b) ist richtig: Die Ordnung ist $6 = 2 \cdot 3$, also besitzt die Gruppe eine zyklische 3-Sylowuntergruppe. Falsch sind (a) und (c): für (a) ist die Ordnung 4, also gibt es gar keine 3-Sylowuntergruppe. Für (c): die Ordnung ist $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, also besitzt S_6 eine 3-Sylowuntergruppe der Ordnung 9. Diese ist jedoch nicht zyklisch, da wegen $exp(S_6) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ kein Element mit Ordnung 9 existiert.

20. Sei p eine Primzahl, so dass $q := p+2$ auch eine Primzahl ist (ein Primzahlzwilling). Die Anzahl der Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung pq ist

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) $p - 1$

    (e) p

    (e) $q - 1$

    (f) q

    Lösung: Sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Die Anzahl der q-Sylowgruppen von G ist kongruent zu 1 modulo q und ein Teiler von p, wegen $p < q$ also gleich 1. Die einzige q-Sylowgruppe von G ist dann eine normale Untergruppe $S_q \triangleleft G$. Wegen $|S_q| = q$ ist sie zyklisch. Die Anzahl der p-Sylowgruppen von G ist kongruent zu 1 modulo p und ein Teiler von q. Wegen $q = p + 2$ lässt dies ebenfalls nur die Möglichkeit 1. Die einzige p-Sylowgruppe von G ist dann eine normale Untergruppe $S_p \triangleleft G$. Wegen $|S_p| = p$ ist sie zyklisch. Insgesamt ist somit $G = S_p \times S_q \cong Z_p \times Z_q$. Umgekehrt ist dies tatsächlich eine Gruppe der Ordnung pq. Die korrekte Antwort lautet also 1.