Serie 3

Faktorielle Ringe, Grösster gemeinsamer Teiler, Ideale, Faktorringe

1. Sei K ein Körper. Zeige, dass $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ ein Integritätsbereich, aber nicht faktoriell ist.

2. Sei R ein faktorieller Ring.

   (a) Seien $a, b, c \in R$. Zeige:
   $$c|ab,\ \mathrm{ggT}(a,c) \sim 1 \Longrightarrow c|b.$$

   (b) Sei $u \in R^\times$, und seien $p_1, \ldots, p_n$ Primelemente von R. Zeige, dass die Teiler von $up_1 \cdots p_n$ genau die Elemente der Form $v \cdot \prod_{i \in I} p_i$ sind für alle $v \in R^\times$ und alle Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$.

3. Betrachte Elemente $a_1, \ldots, a_n$ eines faktoriellen Rings R. Ein Element $b \in R$ mit $\forall i\colon a_i|b$ heisst *gemeinsames Vielfaches von* $a_1, \ldots, a_n$.

   (a) Zeige, dass es ein gemeinsames Vielfaches b von $a_1, \ldots, a_n$ existiert, so dass für jedes gemeinsame Vielfache b' von $a_1, \ldots, a_n$ gilt $b|b'$.

   (b) Zeige, dass dieses *kleinste gemeinsame Vielfache von* $a_1, \ldots, a_n$ eindeutig bis auf Assoziiertheit ist. Wir bezeichnen jedes solche mit $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$.

   (c) Zeige, dass $\mathrm{ggT}(a_1, a_2) \cdot \mathrm{kgV}(a_1, a_2) \sim a_1 \cdot a_2$ gilt.

4. Zeige, dass für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und alle Elemente x, y eines Rings R gilt

   (a) $(x)(y) = (xy)$

   (b) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$

   (c) $(x) \cdot ((y) \cdot \mathfrak{a}) = (xy) \cdot \mathfrak{a}$

5. Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heisst *nilpotent*, falls ein $n \geqslant 1$ mit $x^n = 0$ existiert. Beweise oder widerlege:

   (a) Die Menge der Nullteiler von R zusammen mit 0 ist ein Ideal von R.

   (b) Die Menge I der nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal von R.

   *(c) Zeige: Für I wie in (b) enthält der Faktorring R/I ausser 0 keine nilpotenten Elemente.

6. Betrachte einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S$. Zeige, dass $\mathfrak{a} := \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) := \{a \in R \mid \varphi(a) \in \mathfrak{b}\}$ ein Ideal von R ist und dass φ einen injektiven Ringhomomorphismus $R/\mathfrak{a} \hookrightarrow S/\mathfrak{b}$ induziert.