D-MATH Algebra I HS 2015
Prof. Richard Pink

Serie 1

Ringe, Polynome, Potenzreihen

1. Zeige, dass in jedem Ring R die Distributivregel

$$\forall x, y, z \in R : x(y - z) = xy - xz$$

gilt.

2. Zeige, dass ein Ringhomomorphismus $\psi : R \to S$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er bijektiv ist.

3. Sei K ein Körper und sei $\sigma : K[X] \to K[X]$ ein Ringautomorphismus, dessen Einschränkung von σ auf K die Identität ist.[1] Zeige, dass es Elemente $a_1 \in K^\times$ und $a_0 \in K$ gibt, so dass $\sigma(X) = a_1X + a_0$ ist.

4. Zeige mit der universellen Eigenschaft von Polynomringen, dass $R[X_1, ..., X_n] \cong R[Y_1, ..., Y_m][Y_{m+1}, ..., Y_n]$ für alle $1 \leqslant m \leqslant n$ gilt.

5. (a) Verifiziere die Ringaxiome für Ring $R[[X]]$ der *formalen Potenzreihen* in einer Variable über einem Ring R.

   (b) Zeige, dass ein Element $a_0 + \sum_{i>0} a_i X^i \in R[[X]]$ genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \in R$ eine Einheit ist.

6. Welche der Unterringe

$$\mathbb{Z}[i, \tfrac{1}{5}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{i}{25}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{4i}{5}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{4i}{5}, 4 + 3i]$$

von $\mathbb{C}$ sind gleich?

*7. Zeige, dass jeder endlich erzeugte unitäre Unterring von $\mathbb{Q}$ die Form $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ für ein $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ hat. Folgere daraus, dass $\mathbb{Q}$ als Ring nicht endlich erzeugt ist.

[1] Mit anderen Worten ist σ ein *Automorphismus von K-Algebren.*