D-MATH | Algebra I | HS 2015

Prof. Richard Pink

Serie 2

Einheiten, Produkte, Quotientenkörper

1. Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times \subset \mathbb{R}$, und zeige, dass sie unendlich ist.

2. Sei $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

   (a) Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]^\times$.

   (b) Bestimme alle Primelemente von $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

3. Sei R ein Ring. Ein Element $e \in R$ mit $e^2 = e$ heisst *idempotent*. Zeige, dass die Zerlegungen von R in ein Produkt $S \times T$ von Ringen S und T eineindeutig den Darstellungen $1 = e + e'$ mit e und e' idempotent entsprechen.

4. Sei K ein Körper, und sei $K((X))$ die Menge aller beidseitig unendlichen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in K, für die ein $N \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $a_n = 0$ für alle $n < N$ ist. Diese Folgen schreiben wir als *formale Laurentreihen mit endlichem Hauptteil* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n X^n$.

   (a) Definiere Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $K((X))$ in Analogie zu $K[[X]]$ und zeige, dass damit $K((X))$ ein Körper ist.

   (b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Quot}(K[[X]]) \cong K((X))$.

5. Sei S die Menge aller Funktionen $\mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ für alle Teilmengen $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus \mathrm{dom}(f)| < \infty$, so dass $u, v \in \mathbb{R}[X]$ existieren mit $\forall x \in \mathrm{dom}(f)\colon v(x) \neq 0$ und $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

   Wir nennen zwei Funktionen $f, g \in S$ *äquivalent*, wenn ihre Werte auf einer geeigneten Teilmenge $X \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$ übereinstimmen.

   (a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf S ist. Sei K die Menge ihrer Äquivalenzklassen.

   (b) Definiere Operationen $+$ und $\cdot$ auf K sowie Elemente $0, 1 \in K$, und zeige, dass das Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist.

   (c) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} K$.

   In diesem Sinn ist es berechtigt, die Elemente von $\mathbb{R}(X)$ *rationale Funktionen* zu nennen.