Serie 4

Ideale, Primideale, Hauptidealringe

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuche, wann der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2+a)$ isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, beziehungsweise zu $\mathbb{C}$, beziehungsweise zu keinem der beiden ist.

*2. Zeige, dass ein echtes Ideal $\mathfrak{p} \subsetneqq R$ dann und nur dann ein Primideal ist, wenn für beliebige Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ gilt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \implies (\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \text{ oder } \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}).$$

3. (a) Zeige, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

   (b) Sei R ein Ring und I ein Primideal von R mit endlichem Faktorring R/I. Folgere aus (a), dass I ein maximales Ideal von R ist.

4. Sei R der Ring der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

   (a) Hat R Nullteiler?

   (b) Zeige, dass R überabzählbar viele maximale Ideale hat.

   *(c) Bestimme alle maximale Ideale von R.

   **(d) Sind die maximale Ideale von R Hauptideale? Sind sie endlich erzeugt?

5. Sei R ein Hauptidealring. Zeige, dass jedes von Null verschiedene Primideal in R maximal ist.

6. Im Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}).$$

   Zeige:

   (a) Die Funktion $N\colon R \to \mathbb{Z}^{\geqslant 0}, z = a + bi\sqrt{5} \mapsto |z|^2 = a^2 + 5b^2$ ist multiplikativ (das heisst, $\forall \alpha, \beta \in R : N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$).

   (b) $R^\times = \{u \in R \mid N(u) = 1\} = \{\pm 1\}$.

   (c) Die Elemente $2, 3, 1+i\sqrt{5}, 1-i\sqrt{5}$ sind unzerlegbar in R.

   (d) Die Elemente $2, 3, 1+i\sqrt{5}, 1-i\sqrt{5}$ sind keine Primelemente in R.

   (e) Für das Ideal $I = (2, 1+i\sqrt{5})$ gilt $I \cdot I = (2)$.

   (f) I ist kein Hauptideal von R.

(g) I ist ein maximales Ideal von R.

(h) R ist nicht faktoriell.

7. Die Brüder Dmitrij, Iwan und Alexej Karamasow leben in einem Studentenwohnheim. Dmitrij hat sich angewöhnt alle 5, Iwan alle 7 und Alexej alle 11 Tage eine Pizza zu essen. Die erste Pizza des Jahres 2015 essen Dmitrij und Alexej am 3.1. und Iwan am 4.1. An welchem Tag werden sie erstmals alle drei gemeinsam eine Pizza essen?

**8. Bestimme die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_p[X]$.