Serie 9

Exponent, Homomorphismen, Automorphismen, Normalteiler, Faktorgruppen

1. Zeige: Jede Gruppe vom Exponenten 2 ist abelsch.

*2. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $m \geqslant 3$ eine endliche Gruppe vom Exponenten m existiert, die nicht abelsch ist.

   Hinweis: Untersuche Diedergruppen und Gruppen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} < \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

3. (a) Seien G, H endliche Gruppen und seien $|G|$ und $|H|$ teilerfremd. Zeige, dass jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ trivial ist, also $\varphi(x) = 1_H$ für alle $x \in G$.

   (b) Sei G eine Gruppe, seien H und H' endliche Untergruppen und seien $|H|$ und $|H'|$ teilerfremd. Zeige, dass $H \cap H' = \{1_G\}$ gilt.

4. Finde alle Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung höchstens 7.

5. Die *Quaternionengruppe* ist die Untergruppe $Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ der multiplikativen Gruppe der Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$.

   Zeige: In Q sind alle Untergruppen normal, aber Q ist nicht abelsch.

6. Eine Untergruppe $H < G$, welche unter allen Automorphismen von G in sich übergeht, heisst eine *charakteristische Untergruppe von* G.

   (a) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

   (b) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen von D_4.

   (c) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen von Q.

7. Zeige: Ist ein Normalteiler N einer Gruppe G im Zentrum von G enthalten und G/N zyklisch, so ist G abelsch.