Serie 10

Faktorgruppen, Isomorphiesätze, Operationen, Bahnen

1. Die von den Kommutatoren $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ für alle $g,h \in G$ erzeugte Untergruppe von G heisst die *Kommutatoruntergruppe* von G und wird mit $[G,G]$ bezeichnet. Zeige:

   (a) Jede Untergruppe von G, die $[G,G]$ enthält, ist normal. (Insbesondere ist $[G,G]$ normal.)

   (b) Für jeden Normalteiler $N \lhd G$ gilt
   $$[G,G] < N \Longleftrightarrow G/N \text{ ist abelsch.}$$

   (c) Für jede abelsche Gruppe A und jeden Homomorphismus $\varphi : G \to A$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G,G] \to A$, sodass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ ist, wobei $\pi : G \to G/[G,G]$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   Bemerkung: Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ heisst *Abelisierung* von G, und die genannte Aussage heisst die *universelle Eigenschaft der Abelisierung*.

   (d) Berechne $[G,G]$ und $G/[G,G]$ für $G = D_n$ und alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

2. Seien a and b positive ganze Zahlen. Beweise unter Verwendung der Isomorphiesätze die Identität $\mathrm{ggT}(a,b)\,\mathrm{kgV}(a,b) = ab$.

3. *Lemma von Goursat.* Betrachte Gruppen G_1 und G_2 und eine Untergruppe H von $G_1 \times G_2$, derart dass die beiden Projektionen $p_i : H \to G_i$ surjektiv sind. Zeige, dass es normale Untergruppen $N_1 \lhd G_1$ und $N_2 \lhd G_2$ gibt mit $(N_1 \times N_2) \lhd H$, so dass
$$H/(N_1 \times N_2) \ < \ (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \ \cong \ (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$
der Graph eines Isomorphismus $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ ist.

**4. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeige, dass jede Untergruppe von G isomorph zu einer Faktorgruppe von G ist, und umgekehrt, dass jede Faktorgruppe von G isomorph zu einer Untergruppe von G ist. Gilt dasselbe auch für nichtabelsche endliche Gruppen?

5. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times$ der reellen Zahlen operiert auf $\mathbb{R}^2$ vermöge $t(x,y) = (tx, y/t)$. Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

**6. In einem zweidimensionalen Universum $\mathbb{R}^2$ sei im Ursprung eine Punktmasse (die Sonne) fixiert. Die Bewegung einer zweiten Punktmasse (eines Planeten) folge dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Dies bedeutet eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich des Zeitparameters t.

   (a) Für welche Anfangswerte $(x_0, \dot{x}_0)$ existiert eine für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung $(x(t), \dot{x}(t))$?

   (b) Auf welchem Bereich in $\mathbb{R}^4$ definiert die induzierte Abbildung $(t, (x_0, \dot{x}_0)) \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ eine Operation von $(\mathbb{R}, +)$?

   (c) Klassifiziere die Bahnen (!) und Stabilisatoren dieser Operation.

7. Jede Linksoperation von G auf einer Menge X induziert eine Linksoperation auf der Menge
$$\big\{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m \;\big|\; \forall i \neq j \colon x_i \neq x_j\big\}$$
durch $g(x_1, \ldots, x_m) := (gx_1, \ldots, gx_m)$. Ist diese transitiv, so heisst dies ursprüngliche Operation *m-fach transitiv*. Ist diese transitiv und frei, so heisst die ursprüngliche Operation *scharf m-fach transitiv*. Beispiel: Die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $\{1, \ldots, n\}$ ist m-fach transitiv für jedes $m \leqslant n$, und scharf n-fach transitiv.

   Sei jetzt K ein Körper und $\mathbb{P}^1(K)$ die Menge aller eindimensionalen K-Untervektorräume von K^2. Die natürliche Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ faktorisiert durch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(K) := \mathrm{GL}_2(K)/K^\times{\cdot}I_2$. Zeige: Die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ ist scharf dreifach transitiv.

8. Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass ein in H enthaltener Normalteiler $N \lhd G$ von endlichem Index existiert.

   Hinweis: Finde einen Homomorphismus $G \to S_n$, dessen Kern in H enthalten ist.